

[최고의 수험물리 전문가]

윤형철

# 변리사 탄탄물리

[개념+기출]

## — 07장 강체운동 —

“물리는 외우는 과목이 아니라 생각하는 과목입니다.”

세 가지 강의 철학

목차

— 성장기반 물리

(Grow-based Physics)

— 취사선택 물리

(Cut-off Strategy Physics)

— 생각하는 물리

(Thinking Physics)



물리

윤형철 교수

물리 윤형철 교수입니다.

## 약력

전남과학고등학교 졸업  
서울대학교 사범대학 물리교육과 졸업

전 대치 미래탐구  
전 대치 새움학원  
현 대치 링크물리  
현 변리사스쿨 물리 전문교수

개념 POINT

[역학 개관]

물리현상 (문제상황)	→ 물리량	물리법칙
물체의 운동 <표현>	① 시간 - 주기 ② 위치 - 각위치 ③ 변위 - 각변위 ④ 거리 ⑤ 속도 - 각속도 ⑥ 속력 - 각속력 ⑦ 가속도 - 각가속도	없음 (미적분+기하)  그래프 해석
물체의 운동 <원인>	① 질량 ② 힘/알짜 힘 ③ 돌림힘/알짜 돌림힘 ④ 회전관성	[뉴턴 운동법칙] - 제1법칙 (관성) - 제2법칙 (질량/가속도) - 제3법칙 (작용/반작용)
충돌/융합/분열(폭발) <순식간>	① 운동량/운동량 변화량 ② 충격량/충격력	① 운동량 보존법칙 ② 충격량-운동량 변화량 정리
물체의 운동 <스칼라적 접근>	① 일 ② 운동에너지 ③ 위치에너지-보존력 ④ 역학적 에너지	① 알짜일-운동에너지 변화량 정리 ② 보존력-위치에너지 관계 ③ 역학적 에너지 보존법칙

## I. 물체의 운동

### 1. 물체(body) - 역학적 구분

- (1) 질점 - 입자 (크기 무시)
- (2) 강체 - 고체 (크기 고려)
- (3) 유체 - 액체/기체 (크기 고려)

### 2. 운동(motion)

- (1) 정의  
운동이란 시간에 따라 물체의 위치가 변하는 물리현상이다.
- (2) 분류
  - 1) 병진운동 : 물체가 전체적으로 이동하는 운동(예. 자유낙하 하는 물체)
  - 2) 회전운동 : 물체가 전체적으로 이동하지 않고 고정된 한 점을 중심으로 돌아가는 운동 (예. 선풍기 날개의 운동)
  - 3) 진동운동 : 물체가 일정한 점을 중심으로 왕복하는 운동 (예. 시계추의 운동)

## II. 입자계의 운동

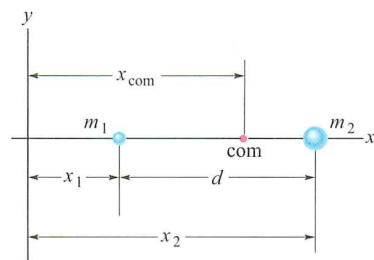
### 1. 질량중심

#### (1) 정의

물체나 물체들로 이루어진 계의 질량중심은 모든 질량이 그 점에 모여 있고 외력이 모두 그 점에 작용한 것처럼 움직이는 특별한 점이다.

#### (2) 위치

1) 두 개의 입자 :  $x_{com} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2}$



축을 옮겨도 질량중심에 대한 상대위치는 변하지 않는다.

2)  $n$  개의 입자 :  $x_{com} = \frac{1}{M} \sum m_i x_i$

3) 고체(연속체) :  $x_{com} = \frac{1}{M} \int x dm$

4) 대칭인 물체는 대칭점, 대칭선 또는 대칭면 위에 질량중심이 존재한다.

5) 물체의 질량중심은 반드시 물체의 내부에 있을 필요는 없다.(예. 도넛, 말발굽)

### 개념 POINT



그림 9-1 (a) 포물선 경로를 따라 움직이는 공. (b) 야구방망이의 질량중심(검은 점)은 간단한 포물선 경로로 움직이지만 다른 점들은 복잡한 경로를 따른다.

### III. 강체의 회전운동

#### 개념 POINT

#### 1. 회전 운동에너지

작업대에 고정되어 빠르게 돌고 있는 회전톱에는 회전에 따른 운동에너지가 있다. 회전 운동에너지를 어떻게 나타낼 수 있을까? 이미 알고 있는 공식  $K = \frac{1}{2}mv^2$ 은 회전톱 질량중심의 운동에너지인데, 여기서는 질량중심이 움직이지 않으므로 0이다.

하지만 회전톱이나 다른 회전강체는 서로 다른 속력으로 움직이는 입자들의 결합체로 취급할 수 있다. 즉, 이들 입자의 운동에너지를 합하면 물체 전체의 운동에너지를 구할 수 있을 것이다. 이런 방법으로 회전체의 운동에너지는 다음과 같이 표기할 수 있다.

$$K = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + \frac{1}{2}m_3v_3^2 + \dots = \sum \frac{1}{2}m_i v_i^2. \quad (10-31)$$

여기서  $m_i$ ,  $v_i$ 는 각각  $i$ 번째 입자의 질량과 속력이고, 둘째 줄의 합은 물체를 구성하는 모든 입자에 대한 합을 뜻한다.

그런데 식 10-31에서  $v_i$ 는 입자마다 서로 다르므로 이대로는 식을 더 간단히 하기 어렵다. 이것을 해결하기 위해 식 10-18( $v = \omega r$ )을 이용하면 다음을 얻는다.

$$K = \sum \frac{1}{2}m_i(\omega r_i)^2 = \frac{1}{2}\left(\sum m_i r_i^2\right)\omega^2. \quad (10-32)$$

여기서  $\omega$ 는 모든 입자에 대해 동일하다.

#### 2. 관성모멘트(회전관성)

##### (1) 정의

식 10-32의 우변에서 괄호 속의 양은 회전체의 질량이 회전축에 대하여 어떻게 분포하고 있는지 알려준다. 이 양을 특정한 회전축에 대한 물체의 **회전관성** 또는 **관성모멘트**  $I$ 라 한다. 특정한 회전축에 대해서 강체의 회전관성은 일정한 값을 가진다(주의:  $I$ 의 값이 의미가 있으려면 어떤 축에 대한 값인지가 명시되어야만 한다).

따라서 회전관성은 다음과 같이 정의한다.

$$I = \sum m_i r_i^2 \quad (\text{회전관성}). \quad (10-33)$$

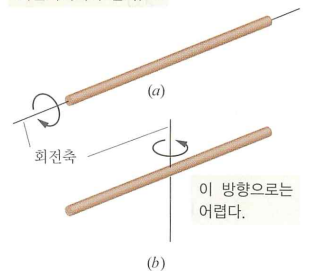
이것을 식 10-32에 대입하면 회전 운동에너지에 대해 구하고자 했던 다음의 식을 얻는다.

$$K = \frac{1}{2}I\omega^2 \quad (\text{라디안 단위}). \quad (10-34)$$

이 식을 유도하는 데 관계식  $v = \omega r$ 을 사용했으므로,  $\omega$ 는 rad 단위로 나타내야 한다. 회전관성  $I$ 의 SI 단위는  $\text{kg} \cdot \text{m}^2$ 이다.

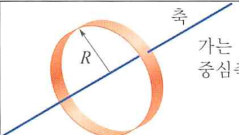
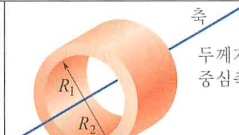
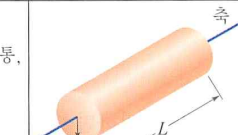
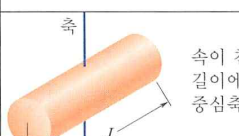
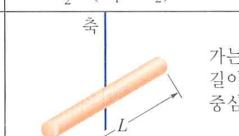
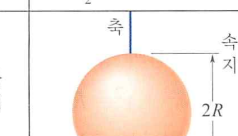
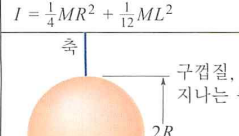
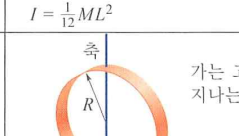
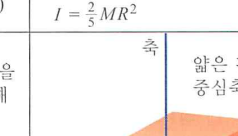
[주의] 질량중심이 움직이지 않는 고정축 회전운동의 경우 병진운동에너지와 회전운동에너지는 동일한 운동에너지이다. 단지 각각의 운동에 적합하게 표현된 것이므로 중복계산 하면 안 된다.

이 방향으로 막대를 회전시키기가 쉽다.



**그림 10-11** 긴 막대는 (a) 길이방향의 중심축에 대해 회전시키는 것이 (b) 길이방향에 수직인 중심축에 대해 회전시키는 것보다 훨씬 더 쉽다. 왜냐하면 질량이 (b)보다 (a)의 경우에 회전축에 더 가깝게 모여 있기 때문이다.

표 10-2 몇 가지 물체의 회전관성

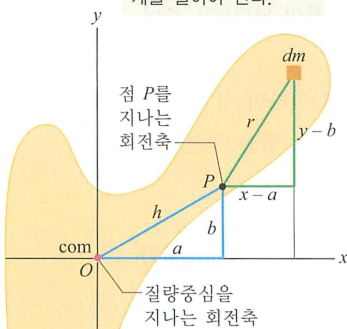
 <p>가는 고리, 중심축에 대해</p> $I = MR^2$ <p>(a)</p>	 <p>두께가 있는 원통, 중심축에 대해</p> $I = \frac{1}{2} M(R_1^2 + R_2^2)$ <p>(b)</p>	 <p>속이 찬 원통 (또는 원판), 중심축에 대해</p> $I = \frac{1}{2} MR^2$ <p>(c)</p>
 <p>속이 찬 원통, 길이에 수직한 중심축에 대해</p> $I = \frac{1}{4} MR^2 + \frac{1}{12} ML^2$ <p>(d)</p>	 <p>가는 막대, 길이에 수직한 중심축에 대해</p> $I = \frac{1}{12} ML^2$ <p>(e)</p>	 <p>속이 찬 구, 중심을 지나는 축에 대해</p> $I = \frac{2}{5} MR^2$ <p>(f)</p>
 <p>구껍질, 중심을 지나는 축에 대해</p> $I = \frac{2}{3} MR^2$ <p>(g)</p>	 <p>가는 고리, 지름을 지나는 축에 대해</p> $I = \frac{1}{2} MR^2$ <p>(h)</p>	 <p>얇은 판, 면에 수직한 중심축에 대해</p> $I = \frac{1}{12} M(a^2 + b^2)$ <p>(i)</p>

개념 POINT

## (2) 평행축 정리

주어진 축에 대하여 질량이  $M$ 인 물체의 회전관성  $I$ 를 구하는 문제를 생각해 보자. 원칙적으로 식 10-35의 적분을 계산하면  $I$ 를 구할 수 있다. 하지만 주어진 축과 평행이면서 물

점  $P$ 를 지나는 축에 대한 회전관성과  $\text{com}$ 을 지나는 회전관성의 관계를 알아야 한다.



체의 질량중심을 지나는 축에 대한 회전관성  $I_{\text{com}}$ 을 이미 알고 있다면  $I$ 를 간단히 계산하는 방법이 있다.  $h$ 를 주어진 축과 질량중심을 지나는 축과의 수직거리라 하자(두 축은 반드시 평행이어야 한다). 그러면 주어진 축에 대한 회전관성  $I$ 는 다음과 같다.

$$I = I_{\text{com}} + Mh^2 \quad (\text{평행축 정리}). \quad (10-36)$$

거리  $h$ 는 질량중심을 지나는 회전축으로부터 회전축을 이동한 거리로 생각하면 된다. 이 식을 **평행축 정리**라 하고, 아래에서 증명한다.

### 보기문제 10.06 두 입자계의 회전관성

그림 10-13a처럼 질량  $m$ 의 두 입자가 길이가  $L$ 이고 질량이 거의 없는 막대로 연결되어 강체를 구성하고 있다.

(a) 막대에 수직하게 질량중심을 지나는 회전축에 대해 회전관성  $I_{\text{com}}$ 을 구하여라.

#### 요점

강체가 두 개의 입자만으로 되어 있으므로 적분하지 않고 식 10-33을 이용하여  $I_{\text{com}}$ 을 구할 수 있다. 즉 각 입자의 회전관성을 구하고 이를 더하면 된다.

**풀이:** 회전축에서 각 입자까지의 수직거리는  $\frac{1}{2}L$ 이므로 다음의 답을 얻는다.

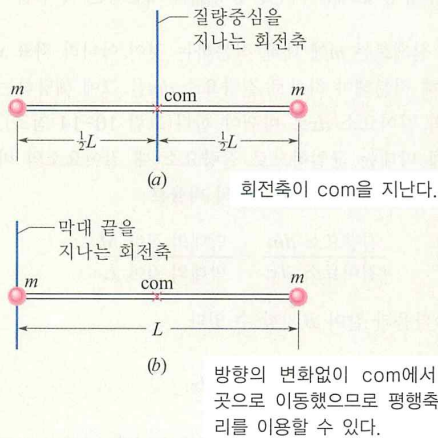
$$I = \sum m_i r_i^2 = (m)\left(\frac{1}{2}L\right)^2 + (m)\left(\frac{1}{2}L\right)^2 = \frac{1}{2}mL^2. \quad \text{답}$$

(b) 원래의 회전축과 평행하고 막대의 왼쪽 끝을 지나는 축에 대한 회전관성  $I$ 는 얼마인가? (그림 10-13b 참조)

#### 요점

이 문제는 간단하므로 두 가지 방법으로  $I$ 를 구할 수 있다. 첫 번째 방법은 (a)와 같은 방법이고, 두 번째는 평행축 정리를 사용하는 유용한 방법이다.

**첫 번째 방법:** (a)와 같은 방법을 사용하지만 수직거리  $r_i$ 가 왼쪽 입자는 0, 오른쪽 입자는  $L$ 이라는 것만 다르



**그림 10-13** 질량  $m$ 의 두 입자가 질량이 거의 없는 가벼운 막대로 연결되어 강체를 구성하고 있다.

므로, 식 10-33에 따라 다음과 같다.

$$I = m(0)^2 + mL^2 = mL^2. \quad \text{답}$$

**두 번째 방법:** 이미 (a)에서 질량중심을 지나는 회전축에 대해  $I_{\text{com}}$ 을 계산했고, 문제의 회전축이 질량중심축에 평행하므로, 식 10-36의 평행축 정리를 사용하면 다음과 같다.

$$I = I_{\text{com}} + Mh^2 = \frac{1}{2}mL^2 + (2m)\left(\frac{1}{2}L\right)^2 = mL^2. \quad \text{답}$$

#### 개념 POINT



### 보기문제 10.07 균일한 막대의 회전관성, 적분

가늘고 균일한 막대가 그림 10-14처럼  $x$ 축에 놓여 있다. 막대의 질량은  $M$ , 길이는  $L$ 이다. 막대의 중심을 원점으로 정하자.

(a) 막대에 수직하고 중심을 지나는 회전축에 대해 막대의 회전관성을 구하여라.

#### 요점

(1) 막대는 회전축으로부터 다른 거리에 있는 수많은 입

(3) 막대는 균일하고 회전축이 중심에 있으므로 실제로는 질량중심에 대한 회전관성  $I_{\text{com}}$ 을 계산하는 것이다.

**풀이:** 실제로는  $m$ 에 대해 적분하는 것이 아니라 좌표  $x$ 에 대해 적분해야 하므로 질량요소  $dm$ 을 그에 해당하는 막대의 길이요소  $dx$ 로 바꿔야 한다(그림 10-14 참조). 그런데 막대는 균일하므로 질량요소 대 길이요소의 비율은 전체 질량 대 전체 길이의 비율로

$$\frac{\text{질량요소 } dm}{\text{길이요소 } dx} = \frac{\text{막대의 질량 } M}{\text{막대의 길이 } L}$$

이며, 다음과 같이 표기할 수 있다.

$$dm = \frac{M}{L} dx.$$

이제 이 결과를 식 10-38에 대입하면 된다. 막대의 모든 부분을 포함해야 하므로 막대의 한쪽 끝에서 다른 쪽

36)를 사용하는 유용한(즉, 손쉬운) 방법으로 구하겠다.

**풀이:** 막대의 끝을 지나는 축을 질량중심을 지나는 축에 평행하게 이동시키면 식 10-36의 평행축 정리를 사용할 수 있다. (a)에서 구한 결과는  $I_{\text{com}} = \frac{1}{12}ML^2$ 이다. 그림 10-14에서 새 회전축과 질량중심축 사이의 수직거

자들로 이루어져 있다. 이들의 회전관성을 각각 더하지는 못한다. 따라서 회전축으로부터 거리  $r$ 에 있는 질량요소  $dm$ 의 회전관성에 대한 일반적인 표현인  $r^2 dm$ 을 쓴다.

(2) (이들을 각각 더하는 것 대신) 이 표현을 적분하여 모든 회전관성을 더한다. 식 10-35로부터 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$I = \int r^2 dm. \quad (10-38)$$

끝, 즉  $x = -L/2$ 부터  $L/2$ 까지 적분하여 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} I &= \int_{x=-L/2}^{x=L/2} x^2 \left( \frac{M}{L} \right) dx \\ &= \frac{M}{3L} \left[ x^3 \right]_{-L/2}^{L/2} = \frac{M}{3L} \left[ \left( \frac{L}{2} \right)^3 - \left( -\frac{L}{2} \right)^3 \right] \\ &= \frac{1}{12}ML^2. \end{aligned} \quad \text{답}$$

이 결과는 표 10-2e와 일치한다.

(b) 막대에 수직하고 왼쪽 끝을 지나는 회전축에 대한 회전관성  $I$ 는 얼마인가?

#### 요점

$x$ 축의 중심을 막대의 왼쪽 끝으로 옮기고  $x=0$ 부터  $x=L$ 까지 적분하면  $I$ 를 구할 수 있다. 여기서 방향의 변화없이 회전축을 이동하였으므로 평행축 정리(식 10-

리  $h$ 는  $\frac{1}{2}L$ 이므로, 식 10-36에서 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} I &= I_{\text{com}} + Mh^2 = \frac{1}{12}ML^2 + (M)\left(\frac{1}{2}L\right)^2 \\ &= \frac{1}{3}ML^2. \end{aligned} \quad \text{답}$$

이 결과는 그림 10-14의 축에 평행하든 안 하든 상관없이, 막대의 끝을 지나는 모든 수직축에서 항상 성립한다.

[그림 10-14]

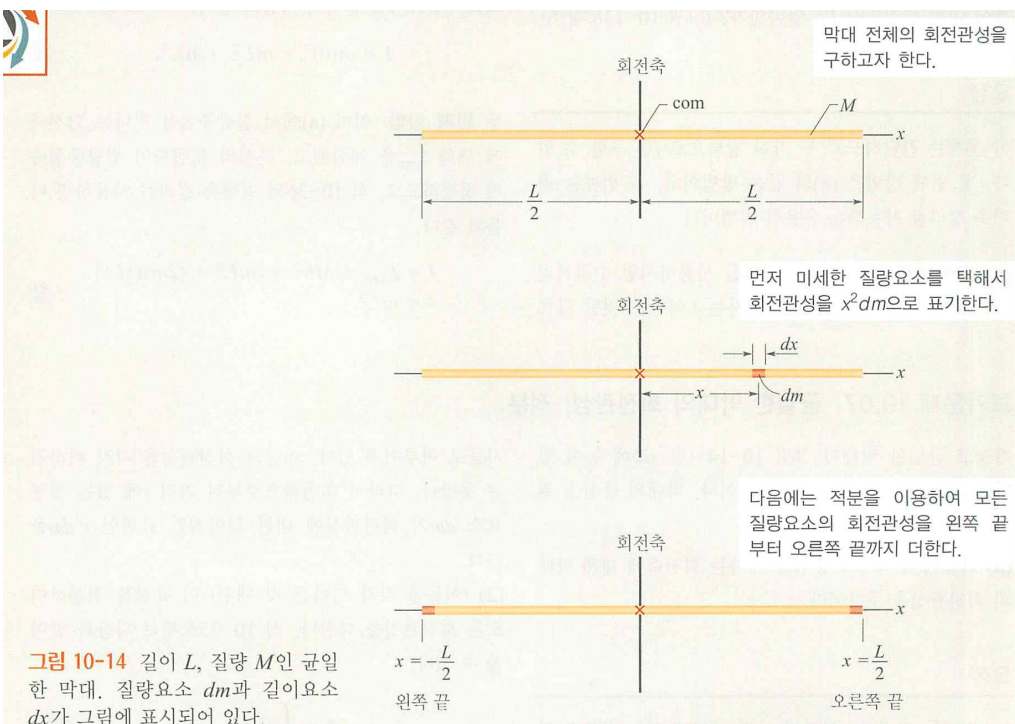


그림 10-14 길이  $L$ , 질량  $M$ 인 균일한 막대. 질량요소  $dm$ 과 길이요소  $dx$ 가 그림에 표시되어 있다.



### 3. 회전운동에 관한 뉴턴 제2법칙

문을 여닫을 때처럼 토크는 강체를 회전시킬 수 있다. 여기서는 강체에 작용하는 알짜 토크  $\tau_{\text{net}}$ 과 토크에 의해 회전축 주위로 생기는 각가속도  $\alpha$  사이의 관계를 구하려고 한다. Newton의 제2법칙  $F_{\text{net}} = ma$ 에서 이 관계를 유추할 수 있다. Newton의 제2법칙은 질량이  $m$ 인 물체가 어떤 좌표축을 따라 움직일 때 물체가 받는 알짜힘  $F_{\text{net}}$ 와 가속도  $a$  사이의 관계이다. 여기서  $F_{\text{net}}$ 은  $\tau_{\text{net}}$ ,  $m$ 은  $I$ ,  $a$ 는  $\alpha$ 로 각각 바꾸면

$$\tau_{\text{net}} = I\alpha \quad (\text{회전에 관한 Newton의 제2법칙}) \quad (10-42)$$

로 표기할 수 있다. 단,  $\alpha$ 는 라디안 단위를 사용해야 한다.

#### 식 10-42의 증명

식 10-42를 증명하기 위해 먼저 그림 10-17의 간단한 상황을 생각해 보자. 길이가  $r$ 이고 질량이 없는 막대의 끝에 질량  $m$ 의 입자가 매달려 강체를 이루고 있다. 막대의 다른 끝은 지면에 수직인 축에 고정되어 막대는 수직축 주위로 회전운동만 할 수 있다. 따라서 입자는 회전축을 중심으로 원궤도로만 움직일 수 있다.

힘  $\vec{F}$ 가 입자에 작용한다고 하자. 입자는 원궤도만을 따라서 움직일 수 있으므로 힘의 접선성분(즉, 원궤도에 대해 접선방향 성분)  $F_t$ 만이 입자를 가속시킬 수 있다. Newton의 제2법칙에 따라  $F_t$ 와 접선방향의 가속도  $a_t$  사이의 관계식을

$$F_t = ma_t$$

로 표기할 수 있다. 한편 입자에 작용하는 토크는 식 10-40에 따라

$$\tau = F_t r = ma_t r$$

이다. 식 10-22,  $a_t = \alpha r$ 을 위의 식에 대입하면

$$\tau = m(\alpha r)r = (mr^2)\alpha \quad (10-43)$$

이다. 우변에서 괄호 안에 있는 양은 회전축에 대한 입자의 회전관성이다(식 10-33 참조). 따라서 식 10-43을 다음과 같이 표기할 수 있다.

$$\tau = I\alpha \quad (\text{라디안 단위}). \quad (10-44)$$

입자에 여러 개의 힘이 작용하는 경우에는 식 10-44를 다음과 같이 일반화할 수 있다.

$$\tau_{\text{net}} = I\alpha \quad (\text{라디안 단위}). \quad (10-45)$$

따라서 식 10-42를 증명하였다. 모든 강체는 단일 입자의 조합으로 생각할 수 있으므로 이 식은 고정된 회전축에 대해 회전하는 임의의 강체에 대해서도 적용할 수 있다.

힘의 접선성분에 의한 토크는 회전축 주위에 각가속도를 만든다.

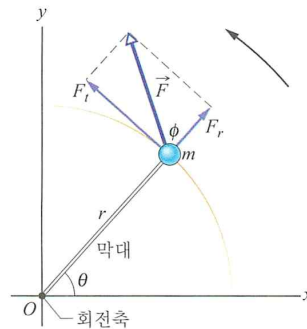


그림 10-17 회전축  $O$ 를 중심으로 회전하는 간단한 모양의 강체. 질량  $m$ 의 입자가 길이가  $r$ 이고 질량이 없는 막대의 끝에 매달려 있다. 힘  $\vec{F}$ 가 작용하여 물체가 회전한다.

보기문제 10.10 Newton의 제2법칙, 회전, 토크, 원판

질량  $M = 2.5 \text{ kg}$ , 반지름  $R = 20 \text{ cm}$ 인 균일한 원판이 고정된 수평축에 끼워져 회전한다(그림 10-19a 참조). 질량  $m = 1.2 \text{ kg}$ 의 토막이 원판 테두리에 감긴 줄에 연결되어 있다. 낙하하는 토막의 가속도, 원판의 각가속도 그리고 줄의 장력을 구하여라. 줄은 질량이 없고 미끄러지지 않으며 축과 원판 사이의 마찰도 없다고 가정한다.

요점

(1) 토막을 계로 잡으면 Newton의 제2법칙( $\vec{F}_{\text{net}} = m\vec{a}$ )에 따라 토막의 가속도를 토막에 작용하는 힘에서 구할 수 있다. (2) 원판을 계로 잡으면 회전에 관한 Newton의 제2법칙( $\tau_{\text{net}} = I\alpha$ )에 따라 토막의 각가속도  $\alpha$ 를 토막에 작용하는 토크에서 구할 수 있다. (3) 토막의 선가속도  $a$ 와 원판 가장자리의 접선가속도  $a_t$ 가 같으므로 토막과 원판의 운동을 결합시킬 수 있다.(부호에 대한 혼동을 피하기 위해 가속도의 크기에 부호를 붙여 확실하게 나타내겠다.)

**토막에 작용하는 힘:** 그림 10-19b는 토막에 작용하는 힘을 나타낸 자유물체그림으로 줄의 장력  $\vec{T}$ 는 위로, 크기가  $mg$ 인 중력  $\vec{F}_g$ 는 아래로 작용한다. 이들 힘은 수직 방향인  $y$ 축으로만 작용하므로  $y$ 방향의 Newton의 제2법칙( $F_{\text{net},y} = ma_y$ )은

$$T - mg = ma \quad (10-46)$$

이다. 여기서  $a$ 는 ( $y$ 축 아래 방향으로의) 가속도의 크기이다. 그러나 아직은  $T$ 를 모르므로 이 식에서  $a$ 를 구할 수는 없다.

**원판에 작용하는 힘:** 앞에서는  $y$ 축 쪽에서 문제를 풀다가 막히면  $x$ 축에 대해 생각하곤 했다. 여기서는 원판의 회전을 생각하여 Newton의 제2법칙을 각도에 대한 형태로 사용한다. 이때 토크와 회전관성을 계산할 회전축

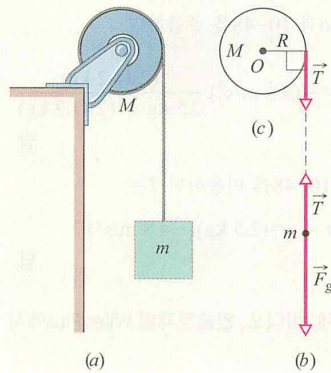


그림 10-19 (a) 낙하하는 토막이 원판을 회전시킨다. (b) 토막의 자유물체그림. (c) 원판의 불완전한 자유물체그림.

은 그림 10-19c처럼 원판에 수직하고 중심  $O$ 를 지나는 축이다.

이제 토크는 식 10-40( $\tau = rF_t$ )에 따라 계산하면 된다. 원판에 작용하는 중력과 축이 원판에 작용하는 힘은 모두 원판의 중심에 작용하므로 토크는 0이다. 한편 줄이 원판을 끄는 힘  $\vec{T}$ 는 중심에서의 거리가  $r = R$ 이고 원둘레에 접선방향으로 작용한다. 따라서 토크는  $-RT$ 이다. 여기서 음의 부호가 붙은 것은 토크가 원판을 정지상태에서 시계방향으로 회전시키려 하기 때문이다.  $\alpha$ 가 음의(시계방향의) 각가속도에 대한 크기라고 하자. 표 10-2c에서 원판의 회전관성  $I$ 는  $\frac{1}{2}MR^2$ 이므로 일반적인 식  $\tau_{\text{net}} = I\alpha$ 를 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$-RT = \frac{1}{2}MR^2\alpha \quad (10-47)$$

이 식은 모르는 양이  $\alpha, T$  두 개나 되고, 구하고자 하는  $a$ 도 아니므로 언뜻 보기에는 쓸모가 없을 것 같다. 하지만 조금만 생각해 보면 다음과 같은 사실을 활용할 수 있다. 줄이 미끄러지지 않으므로 토막의 선가속도  $a$ 와

원판 둘레의 선가속도(의 접선성분)  $a_t$ 는 같다. 그러면 식 10-22( $a_t = R\alpha$ )에 따라  $\alpha = a/R$ 이다. 이것을 식 10-47에 대입하면 다음과 같다.

$$T = -\frac{1}{2}Ma. \quad (10-48)$$

**풀이:** 이제 식 10-46과 10-48을 종합하면

$$a = -g \frac{2m}{M + 2m} = -(9.8 \text{ m/s}^2) \frac{(2)(1.2 \text{ kg})}{2.5 \text{ kg} + (2)(1.2 \text{ kg})} = -4.8 \text{ m/s}^2 \quad \text{답}$$

을 얻는다. 한편 식 10-48을 이용하면  $T$ 는

$$T = -\frac{1}{2}Ma = -\frac{1}{2}(2.5 \text{ kg})(-4.8 \text{ m/s}^2) = 6.0 \text{ N} \quad \text{답}$$

이다. 토막이 떨어지는 가속도가  $g$ 보다 작고 줄의 장력( $=6.0 \text{ N}$ )이 토막의 중력( $=mg = 11.8 \text{ N}$ )보다 작은 것은 예측할 수 있는 당연한 결과이다. 또한 토막의 가속도와 줄의 장력은 원판의 질량에만 관계하고 반지름과는 무관하다는 결과가 나왔다. 간단한 경우를 다시 생각해 보자. 원판의 질량이 없으면  $M = 0$ 이므로 위에서 유도한 공식에서  $a = -g$ 와  $T = 0$ 이며 이것은 당연한 결과이다. 토막이 떨어질 때 위에서 잡아끄는 것이 없으므로 토막이 자유낙하를 하는 것이다.

식 10-22을 이용하면 원판의 각가속도의 크기는 다음과 같다.

$$\alpha = \frac{a}{R} = \frac{-4.8 \text{ m/s}^2}{0.20 \text{ m}} = -24 \text{ rad/s}^2. \quad \text{답}$$

개념 POINT

원판의 가장자리를 당기는 줄에 의한 토크가 원판의 각가속도를 만든다.

이들 두 힘이 토막의 (선)가속도를 결정한다.

두 가속도의 관계를 알아야 한다.

#### 4. 병진운동과 회전운동의 관계

#### 개념 POINT

순수한 병진운동(고정된 방향)		순수한 회전운동(고정축)	
위치	$x$	각위치	$\theta$
속도	$v = dx/dt$	각속도	$\omega = d\theta/dt$
가속도	$a = dv/dt$	각가속도	$\alpha = d\omega/dt$
질량	$m$	회전관성	$I$
Newton의 제2법칙	$F_{\text{net}} = ma$	Newton의 제2법칙	$\tau_{\text{net}} = I\alpha$
일	$W = \int F dx$	일	$W = \int \tau d\theta$
운동에너지	$K = \frac{1}{2}mv^2$	운동에너지	$K = \frac{1}{2}I\omega^2$
일률(일정한 힘)	$P = Fv$	일률(일정한 토크)	$P = \tau\omega$
일-운동에너지 정리	$W = \Delta K$	일-운동에너지 정리	$W = \Delta K$

병진운동		회전운동	
힘	$\vec{F}$	토크	$\vec{\tau} (= \vec{r} \times \vec{F})$
선운동량	$\vec{p}$	각운동량	$\vec{\ell} (= \vec{r} \times \vec{p})$
선운동량 <sup>b</sup>	$\vec{P} (= \Sigma \vec{p}_i)$	각운동량 <sup>b</sup>	$\vec{L} (= \Sigma \vec{\ell}_i)$
선운동량 <sup>b</sup>	$\vec{P} = M\vec{v}_{\text{com}}$	각운동량 <sup>c</sup>	$L = I\omega$
Newton의 제2법칙 <sup>b</sup>	$\vec{F}_{\text{net}} = \frac{d\vec{P}}{dt}$	Newton의 제2법칙 <sup>b</sup>	$\vec{\tau}_{\text{net}} = \frac{d\vec{L}}{dt}$
보존 법칙 <sup>d</sup>	$\vec{P} = \text{상수}$	보존 법칙 <sup>d</sup>	$\vec{L} = \text{상수}$

<sup>a</sup>표 10-3 참조.

<sup>b</sup>강체를 포함하는 입자계에 적용됨.

<sup>c</sup>고정축 주위로 회전하는 강체에 적용됨.  $L$ 은 각운동량의 축방향 성분.

<sup>d</sup>닫힌 고립계에 적용됨.

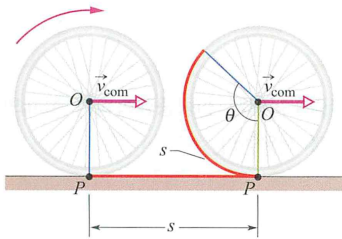


## IV. 강체의 굴림운동

개념 POINT

### 1. 굴림운동 (병진운동 + 회전운동)

**그림 11-2** 굴림운동을 하는 원판의 연속노출 사진. 원판의 가장자리와 중심에 작은 전구를 붙여 놓았다. 가장자리에 있는 전구의 궤적은 싸이클로이드 곡선이다.



**그림 11-3** 구르는 바퀴의 질량중심  $O$ 는 바퀴가 각도  $\theta$ 를 도는 동안 속도  $\vec{v}_{com}$ 으로 거리  $s$ 만큼 이동한다. 지면과 바퀴가 접하는 점  $P$ 도 같은 거리  $s$ 만큼 이동한다.

### 병진운동과 회전운동의 결합으로 본 굴림운동

이 절에서는 표면을 따라 유연하게 굴러가는, 즉 미끄러짐이나 튕김이 없이 굴러가는 물체만을 고려하기로 한다. 그림 11-2는 유연한 굴림운동이 얼마나 복잡한지 잘 보여준다. 물체의 중심은 표면과 평행하게 일직선으로 움직이지만 가장자리에 있는 점은 그렇지 않다. 그러나 굴림운동을 질량중심의 병진운동과 질량중심에 대한 회전운동의 결합으로 취급하면 쉽게 이해할 수 있다.

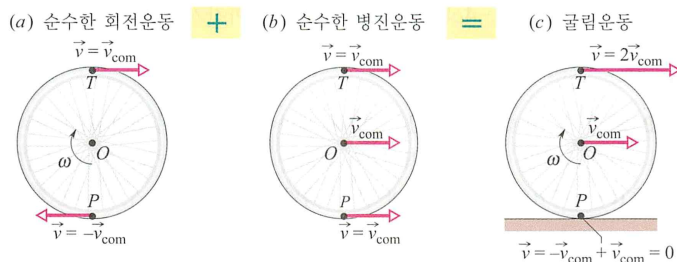
굴림운동을 이렇게 이해하기 위해 그림 11-3처럼 굴러가는 자전거 바퀴를 바라보며 옆에 서 있다고 하자. 그림처럼 바퀴의 질량중심  $O$ 는 일정한 속도  $v_{com}$ 으로 앞을 향하여 움직인다. 도로와 접촉하는 바퀴의 점  $P$ 도 속도  $v_{com}$ 으로 앞을 향하여 움직인다. 따라서 점  $P$ 는 항상 질량중심  $O$ 의 바로 밑에 있다.

시간  $t$  동안 점  $O$ 와 점  $P$ 가 모두 거리  $s$ 만큼 앞으로 움직임을 알 수 있다. 자전거를 탄 사람에게는 시간  $t$  동안에 도로와 접촉했던 바퀴의 한 점이 원호  $s$ 만큼 이동하여, 바퀴가 바퀴중심에 대하여 각도  $\theta$ 만큼 회전한 것으로 보일 것이다. 식 10-17에서 원호  $s$ 와 회전각도  $\theta$ 와의 관계는 다음과 같다.

$$s = \theta R. \quad (11-1)$$

여기서  $R$ 은 바퀴의 반지름이다. 바퀴중심(균일한 바퀴의 질량중심)의 선속도  $v_{com}$ 은  $ds/dt$ 이고, 바퀴중심에 대한 바퀴의 각속도  $\omega$ 는  $d\theta/dt$ 이다. 따라서 식 11-1에서  $R$ 을 상수로 놓고 시간에 대하여 미분하면 다음을 얻는다.

$$v_{com} = \omega R \quad (\text{유연한 굴림운동}). \quad (11-2)$$



**그림 11-4** 회전운동과 병진운동의 결합으로 본 바퀴의 굴림운동. (a) 순수한 회전운동. 바퀴 위의 모든 점들은 동일한 각속력  $\omega$ 로 움직인다. 바퀴의 가장자리에 있는 점들은 모두 같은 선속력  $v = v_{com}$ 으로 움직인다. 바퀴의 꼭대기( $T$ )와 바닥( $P$ )의 선속도  $\vec{v}_{com}$ 이 표시되어 있다. (b) 순수한 병진운동. 바퀴의 모든 점들은 바퀴중심과 마찬가지로 선속도  $\vec{v}_{com}$ 으로 오른쪽으로 움직인다. (c) 바퀴의 굴림운동은 (a)와 (b)가 결합된 운동이다.

## 2. 굴림 운동에너지

개념 POINT

$$K = \frac{1}{2}I_{\text{com}}\omega^2 + \frac{1}{2}Mv_{\text{com}}^2 \quad (11-5)$$

첫 번째 항  $\frac{1}{2}I_{\text{com}}\omega^2$ 은 질량중심을 지나는 축에 대한 회전운동에너지 (그림 11-4a)이고, 두 번째 항  $\frac{1}{2}Mv_{\text{com}}^2$ 은 그림 11-4b와 같은 바퀴의 병진운동과 관련된 운동에너지이다. 따라서 다음과 같은 규칙을 얻는다.



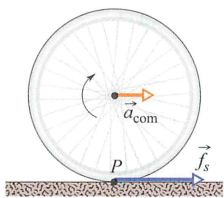
굴림운동을 하는 물체에는 두 가지 종류의 운동에너지가 있다. 하나는 질량중심에 대한 회전에 의한 회전운동에너지( $\frac{1}{2}I_{\text{com}}\omega^2$ )이고, 다른 하나는 질량중심의 병진운동에 의한 병진운동에너지( $\frac{1}{2}Mv_{\text{com}}^2$ )이다.

## 3. 굴림운동의 힘

바퀴가 그림 11-3처럼 일정한 속도로 구른다면 접촉점  $P$ 에서 바퀴가 미끄러지려고 하지 않으므로 바퀴에 작용하는 마찰력이 없다. 그러나 알짜힘이 바퀴에 작용하여 바퀴중심의 속력을 증가 또는 감소시킨다면 질량중심은 가속도  $\vec{a}_{\text{com}}$ 의 방향으로 가속된다. 이 힘은 또한 바퀴의 회전을 빠르거나 느리게 하므로 각가속도  $\alpha$ 가 발생한다. 이러한 가속도 때문에 점  $P$ 에서 바퀴가 미끄러지려는 경향이 나타나고, 접촉점에서 이를 억제하려는 마찰력이 바퀴에 작용한다.

만약 바퀴가 미끄러지지 않는다면 이 힘은 정지마찰력  $\vec{f}_s$ 이고 바퀴는 유연하게 구르게 된다. 여기서 선가속도  $\vec{a}_{\text{com}}$ 과 각가속도  $\alpha$ 의 크기 사이의 관계는 식 11-2를 ( $R$ 을 상수로 놓고) 시간에 대하여 미분하여 얻을 수 있다. 이때 좌변  $dv_{\text{com}}/dt$ 는  $a_{\text{com}}$ 이고 우변  $d\omega/dt$ 는  $\alpha$ 이다. 따라서 유연한 굴림운동에 관한 식을 다음과 같이 얻는다.

$$a_{\text{com}} = \alpha R \quad (\text{유연한 굴림운동}). \quad (11-6)$$



**그림 11-7** 자전거 경주를 시작할 때의 자전거와 같이 바퀴가 미끄러지지 않고 수평으로 선가속도  $\vec{a}_{\text{com}}$ 으로 굴림운동을 하고 있다. 바퀴가 미끄러지지 않도록 바퀴가 미끄러지려는 방향에 반대방향으로 정지마찰력  $\vec{f}_s$ 가 점  $P$ 에서 작용한다.

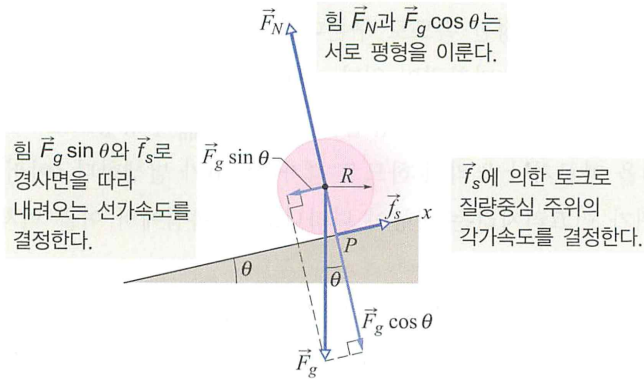
알짜힘이 작용할 때 바퀴가 미끄러진다면 그림 11-3에서 점  $P$ 에 작용하는 마찰력은 운동마찰력  $\vec{f}_k$ 이다. 이때 바퀴는 유연하게 구르지 않으므로 식 11-6을 적용할 수 없다. 이 장에서는 유연한 굴림운동만 취급한다.

그림 11-7은 가속되는 자전거처럼 평평한 표면을 따라 구르는 바퀴의 회전이 빨라지고 있는 예이다. 바퀴를 더 빠르게 회전시키면 바퀴의 밑바닥이 점  $P$ 에서 왼쪽으로 미끄러지려고 한다. 점  $P$ 에서의 마찰력은 바퀴가 미끄러지지 않게 하려고 점  $P$ 에서 오른쪽으로 바퀴에 작용한다. 만약 바퀴가 미끄러지지 않는다면 마찰력은 정지마찰력  $\vec{f}_s$ 가 되고 바퀴는 유연하게 구른다. 이때는 식 11-6을 적용할 수 있다. (마찰력이 없다면 자전거는 움직일 수 없다). 감속하고 있는 자전거와 같이 바퀴의 회전이 느려지는 경우에는 그림 11-7에서 질량중심의 가속도  $\vec{a}_{\text{com}}$ 과 마찰력  $\vec{f}_s$ 는 왼쪽을 향한다.

4. 경사면을 내려오는 굴림운동

개념 POINT

$$a_{\text{com},x} = - \frac{g \sin \theta}{1 + I_{\text{com}}/MR^2} \quad (11-10)$$



**그림 11-8** 반지름  $R$ 인 등근 모양의 균일한 물체가 경사면을 따라 굴러 내려오고 있다. 물체에는 중력  $\vec{F}_g$ , 수직력  $\vec{F}_N$ , 그리고 경사면의 위쪽을 향하는 마찰력  $\vec{f}_s$ 가 작용한다. (벡터의 꼬리가 물체의 중심에 오도록 벡터  $\vec{F}_N$ 은 작용선을 따라 옮겨 그렸다)



## V. 각운동량

### 개념 POINT

### 1. 정의

선운동량  $\vec{p}$ 의 개념과 선운동량 보존법칙은 매우 유용하다. 예컨대 두 자동차의 충돌에 대한 자세한 정보가 없어도 이들을 적용하여 충돌 결과를 예측할 수 있다. 이제는  $\vec{p}$ 에 대응하는 각운동량에 대한 논의를 시작하여, 11-8절에서 이에 해당하는 보존원리를 고려하겠다. 이 원리로 발레, 멋진 다이빙, 아이스 스케이팅과 많은 다른 운동에서 (거의 마술과도 같은) 아름다운 기술을 설명할 수 있다.

그림 11-12는 선운동량이  $\vec{p}(=m\vec{v})$ 인 입자가  $xy$ 평면 위의 점  $A$ 를 지나가는 것을 나타내고 있다. 원점  $O$ 에 관한 입자의 **각운동량**  $\vec{\ell}$ 은 다음과 같이 정의하는 벡터이다.

$$\vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{p} = m(\vec{r} \times \vec{v}) \quad (\text{각운동량의 정의}). \quad (11-18)$$

여기서  $\vec{r}$ 은 원점  $O$ 에 대한 입자의 위치벡터이다. 입자가 선운동량  $\vec{p}(=m\vec{v})$ 의 방향으로 운동할 때 위치벡터  $\vec{r}$ 은  $O$  주위로 회전한다. 이때 각운동량을 갖기 위해서 입자 자체가  $O$  주위를 회전하지 않아도 된다는 점을 유의하여야. 식 11-14와 식 11-18을 비교하면 토크와 힘의 관계에서 나타났던 것과 똑같은 관계가 각운동량과 선운동량 사이에서 나타나는 것을 알 수 있다.

각운동량의 SI 단위는  $\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$ 로  $\text{J} \cdot \text{s}$ 와 같다.

**방향.** 그림 11-12에서 각운동량 벡터  $\vec{\ell}$ 의 방향을 구하기 위하여 벡터  $\vec{p}$ 의 꼬리를 원점으로 이동시킨 다음 오른손 규칙을 이용하여 벡터곱을 하면, 그림과 같이  $z$ 축 양의 방향이  $\vec{\ell}$ 의 방향이 된다. 여기서  $\vec{\ell}$ 이 양인 방향은 입자의 위치벡터  $\vec{r}$ 이 반시계방향으로  $z$ 축에 대하여 회전하는 방향이다. 반대로  $\vec{\ell}$ 이 음인 방향은  $z$ 축에 대하여  $\vec{r}$ 이 시계방향으로 회전하는 방향이다.

**크기.** 식 3-27을 사용하면  $\vec{\ell}$ 의 크기는

$$\ell = rmv \sin \phi \quad (11-19)$$

이다. 여기서  $\phi$ 는  $\vec{r}$ 과  $\vec{p}$  사이의 각도이다. 그림 11-12a를 보면 식 11-19를

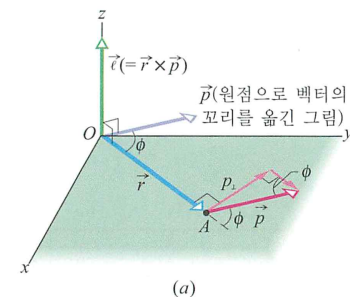
$$\ell = rp_{\perp} = rmv_{\perp} \quad (11-20)$$

로 표기할 수 있다. 여기서  $p_{\perp}$ 는  $\vec{r}$ 에 수직인  $\vec{p}$ 의 성분이고,  $v_{\perp}$ 는  $\vec{r}$ 에 수직인  $\vec{v}$ 의 성분이다. 그림 11-12b를 보면 식 11-19를

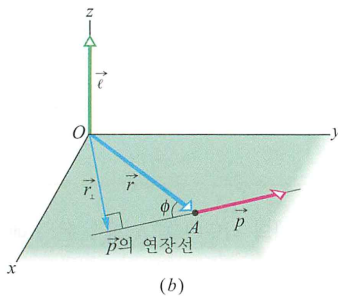
$$\ell = r_{\perp}p = r_{\perp}mv \quad (11-21)$$

로 표기할 수도 있다. 여기서  $r_{\perp}$ 은  $\vec{p}$ 의 연장선과 원점  $O$  사이의 수직거리이다.

**요점.** 여기서 두 가지 특징에 주목하여야 한다. (1) 각운동량은



(a)



(b)

**그림 11-12** 각운동량의 정의.  $xy$  평면 위의 점  $A$ 를 지나가는 질량이  $m$ 인 입자의 선운동량이  $\vec{p}(=m\vec{v})$ 이면 입자의 각운동량은 원점  $O$ 에 대해서  $\vec{\ell}(=\vec{r} \times \vec{p})$ 이다. 이때 각운동량 벡터는 오른손 규칙에 의해  $z$ 축 양의 방향을 향한다.  $\vec{\ell}$ 의 크기는 (a)  $\ell = rp_{\perp} = rmv_{\perp}$  또는 (b)  $\ell = r_{\perp}p = r_{\perp}mv$ 로 표기할 수 있다.

정해진 원점에 대해서만 의미가 있다. (2) 각운동량 벡터의 방향은 항상 벡터  $\vec{r}$ 과  $\vec{p}$ 가 만드는 평면에 수직이다.

### 보기문제 11.03 두 입자가 있는 계의 각운동량

그림 11-13은 일정한 선운동량으로 수평 경로를 따라 움직이는 두 입자를 위에서 내려다 본 그림이다. 운동량의 크기가  $p_1 = 5.0 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$ 인 입자 1은 위치벡터가  $\vec{r}_1$ 이며 점  $O$ 에서 2.0 m 떨어진 지점을 통과한다. 운동량의 크기가  $p_2 = 2.0 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$ 인 입자 2는 위치벡터가  $\vec{r}_2$ 이며 점  $O$ 에서 4.0 m 떨어진 지점을 통과한다. 두 입자로 이루어진 물리계의 점  $O$ 에 대한 알짜 각운동량  $\vec{L}$ 의 크기와 방향을 구하여라.

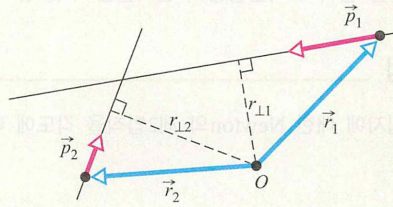


그림 11-13 점  $O$  근처를 지나가는 두 입자.

#### 요점

알짜 각운동량  $\vec{L}$ 을 구하기 위해서는 먼저 각각의 각운동량  $\vec{\ell}_1$ 과  $\vec{\ell}_2$ 를 구해서 더해야 한다. 크기를 구하기 위해서 식 11-18부터 11-21까지 어느 식이든 사용할 수 있다. 그러나 연습문제에서 수직거리  $r_{1\perp} = 2.0 \text{ m}$ 와  $r_{2\perp} = 4.0 \text{ m}$ , 선운동량의 크기  $p_1$ ,  $p_2$ 가 주어졌기 때문에 식 11-21을 사용하는 것이 제일 간편하다. 다른 식들을 사용할 경우에는 필요한 모든 변수값이 다 주어지지 않는다.

**풀이:** 입자 1에 대하여 식 11-21을 적용하면

$$\ell_1 = r_{1\perp} p_1 = (2.0 \text{ m})(5.0 \text{ kg} \cdot \text{m/s}) = 10 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$$

를 얻는다. 벡터  $\vec{\ell}_1$ 의 방향을 구하기 위해 식 11-18을

이다. 따라서 입자계의 알짜 각운동량은 다음과 같다.

$$L = \ell_1 + \ell_2 = +10 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s} + (-8.0 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}) = +2.0 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}.$$

사용하고 벡터곱에 대한 오른손 규칙을 적용하자.  $\vec{r}_1 \times \vec{p}_1$ 은 지면에서 나오는 방향을 향하고, 그림 11-13의 평면에 수직이 되어야 한다. 이는 양의 방향이며 입자 1의 위치벡터  $\vec{r}_1$ 이  $O$ 에 대하여 반시계방향으로 회전한다는 뜻이다. 따라서 입자 1의 각운동량 벡터의 크기는

$$\ell_1 = +10 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$$

이다. 마찬가지로  $\vec{\ell}_2$ 의 크기를 구하면

$$\ell_2 = r_{2\perp} p_2 = (4.0 \text{ m})(2.0 \text{ kg} \cdot \text{m/s}) = 8.0 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$$

이고, 벡터곱  $\vec{r}_2 \times \vec{p}_2$ 는 지면으로 들어가는, 즉 음의 방향이다. 이것 역시  $\vec{r}_2$ 가  $O$ 에 대하여 시계방향으로 회전한다는 사실과 일치한다. 따라서 입자 2의 각운동량 벡터의 크기는

$$\ell_2 = -8.0 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$$

여기서 양의 부호는 입자계의 점  $O$ 에 대한 알짜 각운동량이 지면에서 나오는 방향이라는 뜻이다.

## 2. 회전운동에 관한 뉴턴 제2법칙

Newton의 제2법칙은 단일입자에 대한 힘과 선운동량 사이의 관계로 다음과 같다.

$$\vec{F}_{\text{net}} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (\text{단일입자}). \quad (11-22)$$

선형운동에 관한 물리량과 회전운동에 관한 물리량 사이에 서로 대응하는 관계가 있으므로, 토크와 각운동량 사이에 성립하는 관계가 있을 것으로 예상하여 식 11-22로부터

$$\vec{\tau}_{\text{net}} = \frac{d\vec{\ell}}{dt} \quad (\text{단일입자}) \quad (11-23)$$

로 표기할 수 있다. 결국 식 11-23은 단일입자의 회전운동에 관한 Newton의 제2법칙으로서 다음과 같이 말할 수 있다.

**입자에 작용하는 모든 토크들의 벡터합은 입자 각운동량의 시간변화율과 같다.**

식 11-23은 토크  $\vec{\tau}$ 와 각운동량  $\vec{\ell}$ 은 사용하는 좌표계의 원점으로 보통 정하는 원점과 같이 동일한 점에 대해서 정의해야 한다.

### 3. 입자계 및 강체의 각운동량

#### (1) 입자계의 각운동량

이제는 원점에 대한 입자계의 각운동량을 생각해 보자. 입자계의 총 각운동량  $\vec{L}$ 은 다음과 같이 각 입자의 각운동량  $\vec{\ell}$ 의 벡터합이다.

$$\vec{L} = \vec{\ell}_1 + \vec{\ell}_2 + \vec{\ell}_3 + \cdots + \vec{\ell}_n = \sum_{i=1}^n \vec{\ell}_i. \quad (11-26)$$

여기서  $\vec{\ell}_i$ 는  $i$ 번 째 입자의 각운동량이다.

**알짜 외부 토크.**  $\vec{\tau}_{\text{net}}$ 이 계에 작용하는 모든 외부 토크의 벡터합인 알짜 외부 토크라고 하면, 식 11-28은

$$\vec{\tau}_{\text{net}} = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad (\text{입자계}) \quad (11-29)$$

로 표기할 수 있다. 이 식이 바로 입자계의 회전운동에 대한 Newton의 제2법칙이다.



#### (2) 강체의 각운동량

$$L = I\omega \quad (\text{강체, 고정축}). \quad (11-31)$$

아래첨자  $z$ 를 생략했지만 식 11-31로 정의하는 각운동량은 회전축에 평행한 각운동량 성분만을 표시한다는 것을 유의해야 한다. 이 식에서  $I$ 는 같은 회전축에 대한 회전관성이다.

### 4. 각운동량 보존법칙

앞에서 에너지의 보존과 선운동량의 보존에 대하여 알아보았다. 이제 각운동량 보존이라는 세 번째 보존법칙을 살펴보자. 먼저 회전운동에 관한 Newton의 제2법칙인 식 11-29 ( $\vec{\tau}_{\text{net}} = d\vec{L}/dt$ )에서 출발하기로 하자. 계에 작용하는 알짜 외부 토크가 없다면,  $d\vec{L}/dt = 0$  이므로

$$\vec{L} = \text{상수} \quad (\text{고립된 계}) \quad (11-32)$$

이다. 이 결과가 바로 **각운동량 보존법칙**이며, 다음과 같이 요약할 수 있다.

$$(\text{초기시간 } t_i \text{에서 각운동량의 합}) = (\text{최종시간 } t_f \text{에서 각운동량의 합})$$

수식으로는 다음과 같이 표기한다.

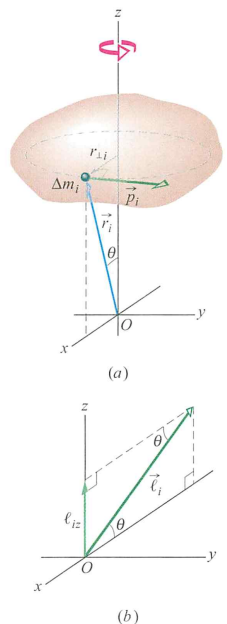
$$\vec{L}_i = \vec{L}_f \quad (\text{고립된 계}) \quad (11-33)$$

결국 식 11-32와 11-33의 의미는 다음과 같다.



외부에서 계에 작용하는 알짜 토크가 없다면 계의 각운동량  $\vec{L}$ 은 계 내부의 변화와 무관하게 일정하다.

#### 개념 POINT



**그림 11-15** (a) 강체가 각속력  $\omega$ 로  $z$ 축 주위를 회전하고 있다. 물체 내의 질량요소  $\Delta m_i$ 는  $z$ 축에 대하여 반지름이  $r_{\perp,i}$ 인 원운동을 한다. 질량요소의 선운동량은  $\vec{p}_i$ 이며 원점  $O$ 에 대한 위치는  $\vec{r}_i$ 이다. 그림에 있는 질량요소의  $r_{\perp,i}$ 는  $x$ 축에 평행하다. 여기서는  $r_{\perp,i}$ 가  $x$ 축에 평행한 질량요소를 나타내었다. (b) 그림 (a)의 질량요소의 원점  $O$ 에 대한 각운동량  $\vec{\ell}_i$ 와  $z$ 축 성분인  $\ell_{iz}$ .



식 11-32와 11-33은 벡터방정식이므로, 서로 직각인 세 축에 대한 각운동량 성분의 보존을 나타내는 세 개의 방정식에 해당한다. 계에 작용하는 토크에 따라 각운동량은 모든 방향이 아니라 한두 방향에 대해서만 보존될 수도 있다.



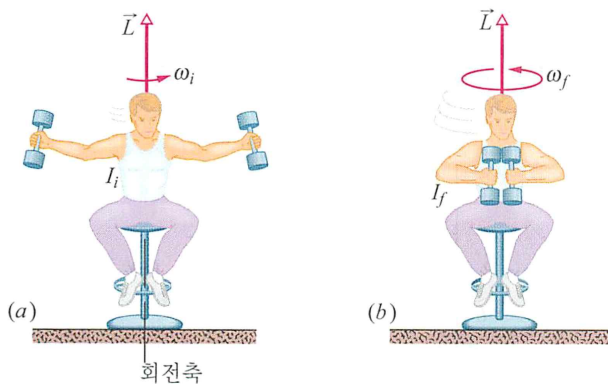
만약 축 방향으로 계에 작용하는 알짜 외부 토크가 0이라면 그 축에 대한 각운동량은 계 내부의 변화에도 불구하고 변하지 않는다.

이것은 강력한 표현이다. 이러한 경우에는 단지 계의 초기와 최종 상태에만 관심이 있다. 어떤 중간 상태에 대해서도 고려할 필요가 없다.

이 법칙을 그림 11-15처럼  $z$ 축에 대하여 회전하는 고립된 강체에 적용할 수 있다. 원래 강체였던 물체가 회전축에 대하여 질량이 재분포되면 그 축에 대한 회전관성이 변한다. 그러나 식 11-32와 식 11-33에 따르면 각운동량은 변하지 않으므로, 식 11-31을 식 11-33에 대입하면 각운동량 보존법칙을

$$I_i \omega_i = I_f \omega_f \quad (11-34)$$

로 표기할 수 있다. 여기서 아래첨자는 질량의 재분포 전후의 회전관성  $I$ 와 회전속력  $\omega$ 의 값이다.



**그림 11-16** (a) 학생의 회전관성이 크므로 각속력은 작다. (b) 팔을 오므려 회전관성을 감소시키면 자동적으로 각속력이 증가한다. 이때 회전계의 전체 각운동량  $\vec{L}$ 은 변하지 않는다.

## VI. 역학적 평형

물체에 여러 힘이 작용하지만 물체의 병진 운동 상태와 회전 운동 상태가 모두 변하지 않을 때 역학적 평형을 이룬다고 한다. 물체가 역학적 평형을 이루려면 다음의 두 조건을 동시에 만족해야 한다.

- 물체에 작용하는 모든 힘의 합력이 0이 되어야 한다.

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots = \sum \vec{F}_i = 0 \quad (\text{병진 운동에 대한 평형})$$

- 물체에 작용한 힘의 임의의 점에 대한 돌림힘의 합이 0이 되어야 한다.

$$\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3 + \dots = \sum \vec{r}_i = 0 \quad (\text{회전 운동에 대한 평형})$$

■ 변리사 기출문제

개념 POINT

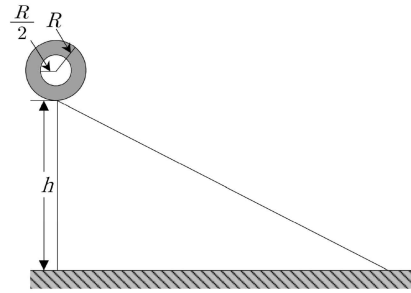
1. [2004년 변리사] (중) 관성모멘트와 가속도

속이 짝 찬 구( $I = \frac{2}{5}MR^2$ ), 속이 빈 구( $I = \frac{2}{3}MR^2$ ), 속이 짝 찬 원통( $I = \frac{1}{2}MR^2$ ), 속이 빈 원통( $I = MR^2$ )과 같은 구르는 물체들을 경사면의 꼭대기 위에 나란히 세워 놓고 동시에 놓았다. 같은 질량  $M$ 을 갖는 이들 물체들이 미끄러지지 않고 모두 굴러 간다고 하자. 공기저항을 무시할 때, 가장 먼저 바닥에 도달한 물체에 대한 설명으로 옳은 것은? (여기서  $I$ 는 질량, 반지름  $R$ 인 물체의 질량중심을 지나는 회전축에 대한 관성모멘트를 나타낸다.)<sup>1)</sup>

- ① 회전에너지에 관계없이 속이 짝 찬 원통이 가장 먼저 바닥에 도달한다.
- ② 회전에너지가 제일 큰 물체인 속이 빈 원통이 가장 먼저 바닥에 도달한다.
- ③ 회전에너지에 관계 없이 속이 빈 구가 가장 먼저 바닥에 도달한다.
- ④ 회전에너지가 제일 작은 물체인 속이 짝 찬 구가 가장 먼저 바닥에 도달한다.
- ⑤ 회전에너지에 관계 없이 모든 물체가 동시에 바닥에 도달한다.

2. [2006년 변리사] (중) 강체운동

아래 그림과 같이 질량이  $M$ 이고 내반경  $\frac{R}{2}$  과 외반경  $R$  사이가 균일하게 채워진 원통이 지상에서 높이가  $h$ 인 경사면 위에서 경사면을 따라 미끄러짐 없이 굴러 내려 온다고 하자. 이 원통이 바닥에 도달했을 때 질량중심의 속력은? (중력가속도는  $g$ 라고 한다.)<sup>2)</sup>



<그림>

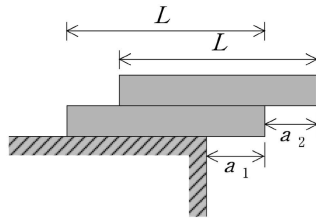
- ①  $\sqrt{\frac{7gh}{8}}$       ②  $\sqrt{\frac{9gh}{8}}$       ③  $\sqrt{\frac{11gh}{9}}$       ④  $\sqrt{\frac{16gh}{13}}$       ⑤  $\sqrt{\frac{19gh}{15}}$

개념 POINT



3. [2007년 변리사] (중) 질량중심

한변의 길이가  $L$ 이고 질량이 균일하게 분포한 직육면체 모양의 동일한 벽돌 두 개를 그림과 같이 수평의 테이블 위에 쌓았다. 벽돌들이 평형상태에 있을 때의 최대값은 얼마인가?<sup>3)</sup>



①  $\frac{1}{2}L$

②  $\frac{2}{3}L$

③  $\frac{3}{4}L$

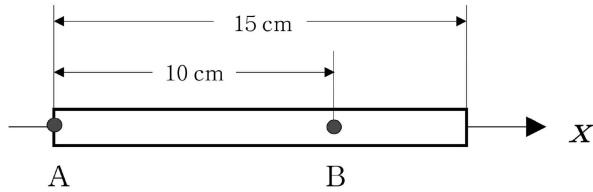
④  $\frac{4}{5}L$

⑤  $\frac{5}{6}L$

개념 POINT

4. [2008년 변리사] (중) 질량중심 + 평행축정리

질량이  $20g$ 이고 길이가  $15cm$ 인 균일한 원통형 막대가 그림과 같이  $X$ 축을 중심축으로 하여 놓여 있다. 막대의 끝 점 A에서  $X$ 축에 수직으로 지나는 축에 대한 막대의 관성모멘트는  $5,000g \cdot cm^2$ 이다. A로부터  $X$ 축 방향으로  $10cm$  떨어진 지점 B에서 축에 수직으로 지나는 축에 대한 막대의 관성모멘트는? (단, A, B에서 막대를 수직으로 지나는 축은 서로 평행하며 막대의 중심축을 지난다.)<sup>4)</sup>

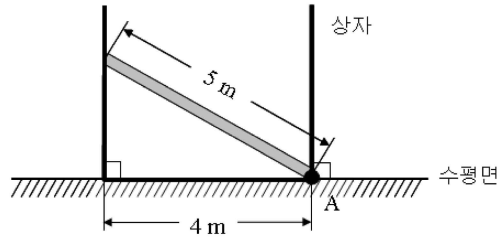


- ①  $3,000g \cdot cm^2$                       ②  $3,500g \cdot cm^2$                       ③  $4,000g \cdot cm^2$   
 ④  $4,500g \cdot cm^2$                       ⑤  $5,000g \cdot cm^2$

개념 POINT

5. [2008년 변리사] (상)

그림과 같이 질량  $M$ , 길이  $5m$ 인 일정한 굵기의 균일한 재질의 막대가 수평면에 놓인 폭이  $4m$ 인 상자의 수직 한 벽과 모서리 A에서 힘의 평형을 이루며 걸쳐 있다. 상자의 벽과 막대 사이에 마찰이 없을 때, A에서 상자가 막대에 작용하는 힘의 크기는? (단, 막대의 굵기는 무시하며 막대는 휘어지지 않고, 중력가속도는  $g$ 이다.)<sup>5)</sup>

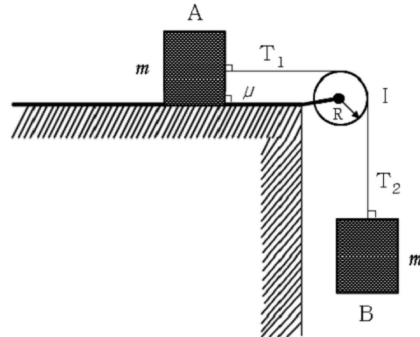


- ①  $\frac{\sqrt{5}}{3}Mg$       ②  $Mg$       ③  $\frac{5}{4}Mg$       ④  $\frac{\sqrt{13}}{3}Mg$       ⑤  $\frac{5}{3}Mg$

개념 POINT

6. [2009년 변리사]

그림과 같이 수평인 탁자면 위에 물체 A가 반경  $R$ 인 원판 도르래를 통하여 물체 B와 연결되어 있다. 물체 A, B와 도르래의 질량은 모두  $m$ 이며, 물체 A와 탁자면 사이의 운동마찰계수는  $\mu = 0.20$ 이다.



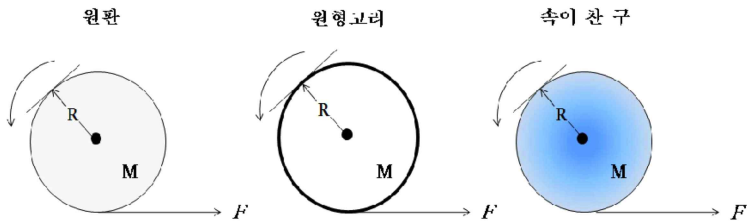
물체가 등가속도로 움직이고 있을 때, 도르래에 토크를 발생시키는 장력의 차이  $T_2 - T_1$ 은?  
(단, 원판 도르래의 관성모멘트  $I$ 는  $I = \frac{1}{2}mR^2$ ,  $g$ 는 중력가속도이다. 줄의 질량은 무시하고, 줄은 도르래에서 미끄러지지 않는다.)<sup>6)</sup>

- ①  $0.08mg$       ②  $0.12mg$       ③  $0.16mg$       ④  $0.20mg$       ⑤  $0.24mg$

개념 POINT

7. [2010년 변리사] (하)

그림은 원판, 원형고리, 속이 찬 구에 방향과 크기가 동일한 힘  $F$ 가 각각 작용하여 각 물체가 질량중심을 지나는 축을 중심으로 회전운동하는 것을 나타낸 것이다. 각 물체의 질량은  $M$ , 반지름은  $R$ 로 동일할 때 각 물체의 각가속도의 크기를 바르게 비교한 것은? (단, 모든 물체는 균일하며 종이면에 수직인 회전축의 위치는 고정되어 있고 축의 크기는 무시한다.)

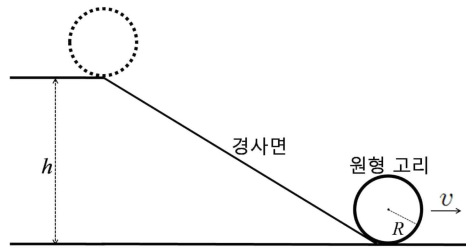


- ① 원판 < 원형고리 < 속이 찬 구
- ② 원판 < 속이 찬 구 < 원형고리
- ③ 원형고리 < 속이 찬 구 < 원판
- ④ 원형고리 < 원판 < 속이 찬 구
- ⑤ 속이 찬 구 < 원판 < 원형고리

개념 POINT

8. [2011년 변리사]

그림과 같이 질량  $M$ , 반지름  $R$ 인 원형 고리가 정지 상태에서 높이  $h$ 인 경사면을 따라 마찰력에 의해 미끄러지지 않고 굴러 내려간다.



원형 고리가 바닥에 도달한 순간 질량중심의 속도를  $v$ 라 할 때, 이에 대한 설명으로 옳은 것만을 <보기>에서 있는대로 고른 것은? (단, 중력가속도는  $g$ 이고, 공기저항은 무시한다.)<sup>8)</sup>

<보기>

ㄱ. 원형 고리의 관성모멘트는  $\frac{1}{2}MR^2$ 이다.

ㄴ.  $v$ 는  $\sqrt{gh}$ 이다.

ㄷ. 마찰력이 한 일은 0이다.

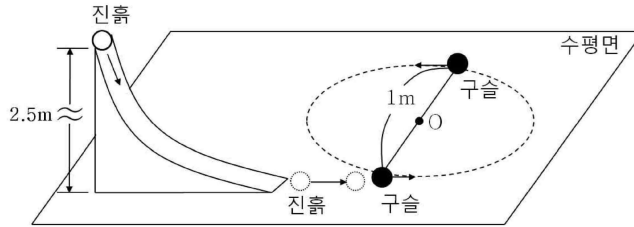
- ① ㄱ    ② ㄴ    ③ ㄷ    ④ ㄱ, ㄴ    ⑤ ㄴ, ㄷ

개념 POINT



9. [2012년 변리사] (상)

길이  $1m$ 인 막대 양 끝에 질량이  $1kg$ 인 동일한 구슬이 달려 있다. 막대는 가운데 지점  $O$ 를 지나는 축을 중심으로 자유롭게 회전할 수 있다. 그림과 같이 높이  $2.5m$ 에서 질량  $1kg$ 인 진흙 덩어리가 언덕을 따라 내려와 막대와 수직으로 구슬에 모두 들러붙으면서 막대와 진흙 덩어리가 함께  $O$ 를 중심으로 수평면상에서 회전운동을 한다. 이때 각속도( $rad/s$ )는 약 얼마인가? (단,  $g = 9.8m/s^2$ 이다. 막대의 질량 및 변형, 진흙 자체의 회전, 운동에서의 마찰 및 저항은 무시한다.)<sup>9)</sup>



① 3.8

② 4.7

③ 5.6

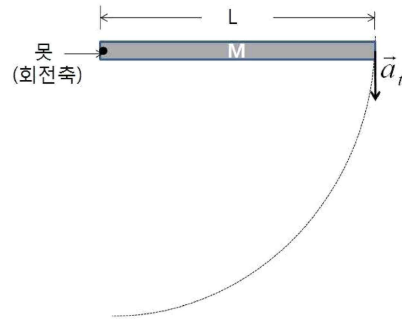
④ 6.3

⑤ 7.8

개념 POINT

10. [2013년 변리사]

길이가  $L$ 이고 질량이  $M$ 인 균일한 막대가 수직벽에 박혀 있는 못을 회전축으로 하여 진동할 수 있도록 설치되어 있다. 그림과 같이 막대를 수평으로 하여 가만히 놓았을 때, 회전축의 반대편에 있는 막대 끝의 최초 접선 가속도( $\vec{a}_t$ )의 크기는? (단, 막대와 못, 공기 및 벽면 사이의 마찰력은 무시하고, 회전축은 막대의 끝에 위치해 있다. 중력가속도의 크기는  $g$ 이다.)<sup>10)</sup>

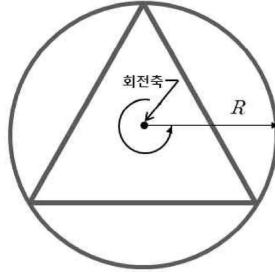


- ①  $\frac{2g}{3}$       ②  $\frac{5g}{4}$       ③  $\frac{4g}{3}$       ④  $\frac{3g}{2}$       ⑤  $\frac{5g}{2}$

개념 POINT

11. [2015년 변리사] (상)

그림과 같이 반지름이  $R$ 인 원형고리에 막대기로 된 정삼각형이 내접한 모양의 구조물이 있다. 이 구조물이 원형고리의 중심을 지나는 수직축에 대하여 각속도  $\vec{\omega}$ 로 회전하고 있을 때 회전축에 대한 각운동량의 크기는? (단, 원형고리와 막대기의 폭과 두께는 무시할 정도로 얇고, 원형고리와 막대기의 선질량밀도는  $\mu$ 로 균질하다.)<sup>11)</sup>

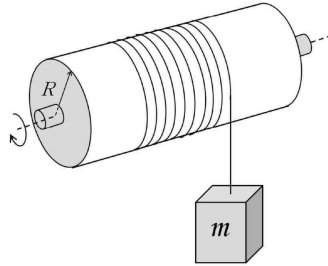


- ①  $\left(\pi + \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)\mu R^3 \omega$       ②  $(\pi + 3\sqrt{3})\mu R^3 \omega$       ③  $3\sqrt{3}\mu R^3 \omega$   
 ④  $\left(2\pi + \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)\mu R^3 \omega$       ⑤  $(2\pi + 3\sqrt{3})\mu R^3 \omega$

개념 POINT

12. [2015년 변리사] (상)

반지름  $R=0.6m$ 이고 관성모멘트  $3kg \cdot m^2$ 인 원통형 도르래에 그림과 같이 줄이 감겨 있고, 줄의 끝에 질량  $m=5kg$ 인 물체가 매달려 있다. 정지해 있던 물체가 자유 낙하하여 도르래를 회전시킬 때, 도르래가 10회 회전하는 데 걸리는 시간(초)은? (단, 줄은 늘어나지 않고, 줄의 질량 및 굵기, 공기저항, 도르래의 회전마찰력은 무시한다. 중력가속도 크기  $g$ 는  $10m/s^2$ 이다.)<sup>12)</sup>



①  $\sqrt{2}$

②  $\sqrt{\pi}$

③  $\pi$

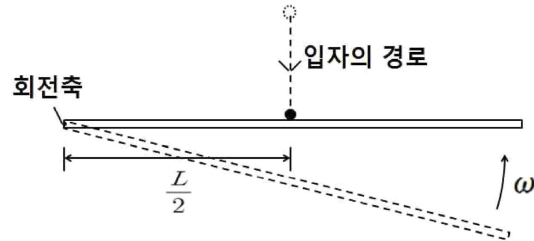
④  $2\sqrt{\pi}$

⑤  $2\pi$

개념 POINT

13. [2016년 변리사] (중) 각운동량 보존법칙

그림과 같이 수평면 상에서 일정한 각속력  $\omega$ 로 회전하던 질량  $M$ , 길이  $L$ 인 가늘고 균일한 막대가 일정한 속력으로 운동하던 질량  $m$ 인 입자와 충돌한다. 충돌하는 순간 막대는 입자의 운동 방향에 수직이고, 충돌 직후 두 물체는 정지하였다. 충돌 전 입자의 속력은? (단, 입자의 크기는 무시한다.)<sup>13)</sup>

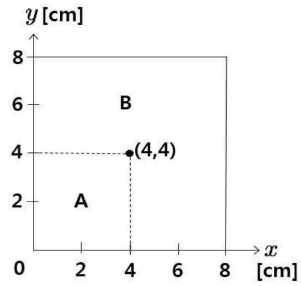


- ①  $\frac{ML\omega}{3m}$       ②  $\frac{2ML\omega}{3m}$       ③  $\frac{ML\omega}{m}$       ④  $\frac{3ML\omega}{2m}$       ⑤  $\frac{3ML\omega}{m}$

개념 POINT

14. [2018년 변리사] (중) 질량중심

그림과 같이 밀도가 균일하며 한 변의 길이가  $8\text{cm}$ 인 정사각형 철판이 평면에 놓여 있다. 이 철판 면적의  $\frac{1}{4}$ 인 A부분을 잘라냈을 때, 남아 있는 B부분의 질량중심의 좌표는? (단, 철판의 두께는 무시한다.)<sup>14)</sup>



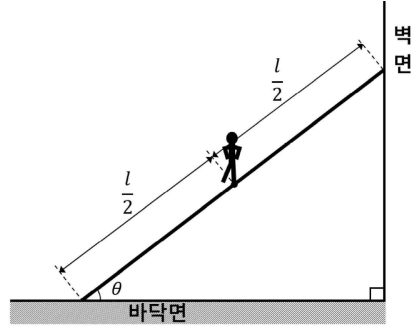
- ①  $(4, 4)$       ②  $(\frac{13}{3}, \frac{13}{3})$       ③  $(\frac{9}{2}, \frac{9}{2})$       ④  $(\frac{14}{3}, \frac{14}{3})$       ⑤  $(5, 5)$

개념 POINT



15. [2020년 변리사] (상)

길이가  $l$ 이고 질량이  $m$ 인 균일한 사다리가, 바닥면과  $\theta$ 의 각도를 이루며 마찰이 없는 벽면에 기대어 있다. 질량  $M$ 인 남자는 사다리의 질량 중심에 서 있다. 사다리와 바닥면 사이의 최대 정지마찰계수는  $\mu_s$ 이다. 사다리가 미끄러지지 않기 위한 최소 각도를  $\theta_{\min}$ 라고 할 때  $\tan\theta_{\min}$ 은?15)

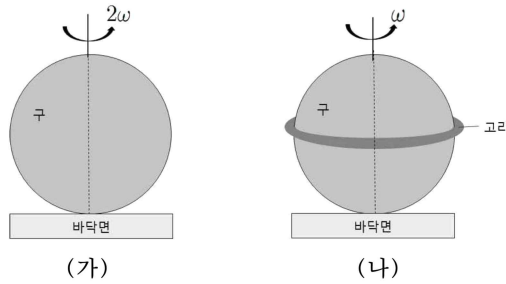


- ①  $\frac{1}{2\mu_s}$                       ②  $\frac{\mu_s}{2}$                       ③  $\frac{2}{3\mu_s}$
- ④  $\frac{\mu_s m}{2(M+m)}$                       ⑤  $\frac{M}{2\mu_s(M+m)}$

개념 POINT

16. [2021년 변리사] (중)

그림 (가)는 질량이  $M$ 이고 반지름이  $R$ 인 속이 꽉 찬 균일한 강체구를, (나)는 질량이  $m$ 이고 반지름이  $R$ 인 가늘고 균일한 고리를 (가)의 구에 수평으로 끼워 고정한 강체를 나타낸 것이다. 정지해 있던 (가)와 (나)의 강체에 동일한 토크를 동일한 각도까지 각각 가했더니, (가)와 (나)의 강체는 제자리에서 각각 각속도  $2\omega$ 와  $\omega$ 로 회전한다.



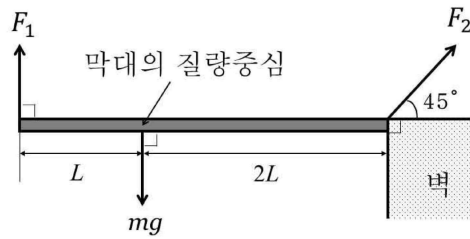
질량비  $\frac{M}{m}$ 은? (단, 구의 관성모멘트는  $\frac{2}{5}MR^2$ 이고, 고리는 수평을 유지하며 회전하고, 고리의 두께, 강체와 바닥면 사이의 마찰, 공기마찰은 무시한다.)<sup>16)</sup>

- ①  $\frac{3}{5}$       ②  $\frac{5}{6}$       ③  $\frac{6}{5}$       ④  $\frac{5}{4}$       ⑤  $\frac{5}{3}$

개념 POINT

17. [2023년 변리사] (중)

그림과 같이 벽에 닿아 있는 길이  $3L$ , 무게  $mg$ 인 막대를 두 사람이 당겨 수평을 유지한다. 두 사람이 당기는 힘의 크기의 비  $\frac{F_1}{F_2}$ 는? (단, 막대의 밀도는 불균일하고, 막대의 굵기와 벽의 마찰은 무시한다.)<sup>17)</sup>



①  $\frac{1}{2\sqrt{2}}$

②  $\frac{1}{\sqrt{2}}$

③ 1

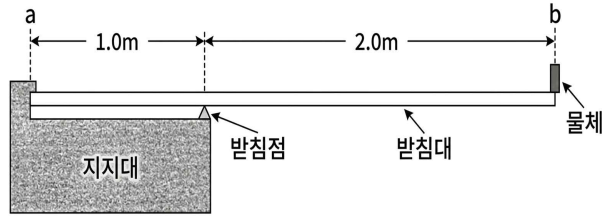
④  $\sqrt{2}$

⑤  $2\sqrt{2}$

개념 POINT

18. [2026년 변리사] (중)

그림과 같이 길이가  $3.0m$  이고 무게가  $200N$  인 받침대가 수평을 유지한 채 놓여 있다. 지지대의 왼쪽 끝 지점 a로부터  $1.0m$  떨어진 지점에 받침점이 놓여 있고, 받침대의 오른쪽 끝 지점 b에 무게가  $500N$  인 물체가 놓여 있다.



지점 a에서 받침대를 연직 아래 방향으로 누르는 힘의 크기는? (단, 받침대 밀도는 균일하며, 받침대의 두께, 물체의 부피, 받침대를 지지하기 위한 지점 a에서의 돌출 길이는 무시한다.)<sup>18)</sup>

- ①  $800N$       ②  $900N$       ③  $1000N$       ④  $1100N$       ⑤  $1200N$

개념 POINT

19. [2026년 변리사]

질량이  $M$ 이고 반지름이  $R$ 인 얇은 고리(ring)가 수평면상에서 직선 경로를 따라 미끄러짐 없이 구르고 있다. 고리의 질량중심 속력이  $v$ 인 순간에, 고리의 병진 운동 에너지와 질량중심을 관통하는 축에 대한 회전 운동 에너지를 더한 값은? (단, 고리의 선밀도는 일정하고, 두께는 무시하며, 질량중심을 관통하는 축은 수평면과 나란하다.)<sup>19)</sup>

①  $Mv^2$

②  $\frac{3}{2}Mv^2$

③  $2Mv^2$

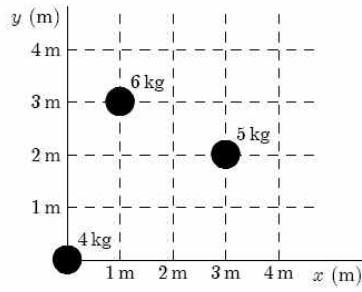
④  $\frac{5}{2}Mv^2$

⑤  $\frac{7}{2}Mv^2$

개념 POINT

■ 개념확인문제

20. 아래의 세 물체의 질량중심의  $x, y$ 좌표는 각각 얼마인가?<sup>20)</sup>



- ① 0, 0
- ② 1.3m, 1.7m
- ③ 1.4m, 1.9m
- ④ 1.9m, 2.5m
- ⑤ 1.4m, 2.5m

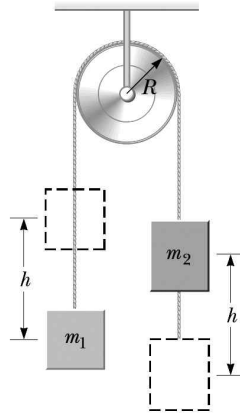
개념 POINT

21. 입자들로 이루어진 계의 질량중심이 한 곳에 정지해 있는 경우는?<sup>21)</sup>

- ① 초기에 정지해 있고 외력의 합이 0인 경우
- ② 초기에 정지해 있고 내력의 합이 0인 경우
- ③ 외력의 합력의 크기가 최대 정지 마찰력보다 작은 경우
- ④ 내부에서 마찰력이 작용하지 않는 경우
- ⑤ 위에는 정지해 있는 경우가 없다.

개념 POINT

22. 그림과 같이 도르래를 통하여 줄로 연결된 질량  $m_1$ ,  $m_2$ 를 가진 2개의 물체가 있다. 도르래의 반지름은  $R$ , 관성모멘트는  $I$ 이다. 줄은 도르래에서 미끄러지지 않고 전체 계는 정지 상태에서 출발하였다. 물체 2가  $h$ 만큼 내려왔을 때 각 물체의 속력을 구하고, 이때 도르래의 각속력을 구하라.<sup>22)</sup>

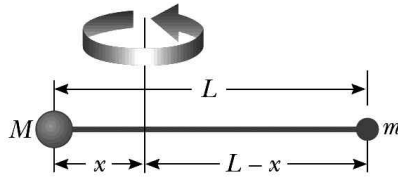


개념 POINT



23. 질량이 각각  $M$ ,  $m$ 인 두 개의 작은 공이 길이  $L$ 인 가벼운 막대에 의해 연결되어 있다.<sup>23)</sup>

개념 POINT



(1) 그림과 같이 막대에 수직한 회전축에 회전시킬 때의 회전 관성을 계산하라. 단, 회전축은  $M$ 으로부터 거리  $x$ 만큼 떨어진 막대위의 점을 지난다.

(2) 위에서 계산한 회전 관성은 언제 최소가 되는가?

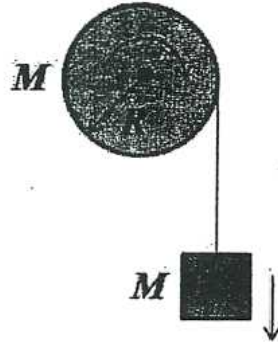
(3) 회전 관성의 최솟값을 구하라.

24. 질량  $M$ , 반지름  $R$ 인 균일하게 팍 찬 구의 중심축에 대한 회전 관성은  $\frac{2}{5}MR^2$ 이다. 길이가  $3R$ 인 줄의 한 끝을 구의 표면에 붙이고 다른 한 끝은 천장에 붙여 구를 매달아 놓는다. 천장에 붙인 점에 대한 회전 관성은?<sup>24)</sup>

- ①  $\frac{2}{5}MR^2$
- ②  $9MR^2$
- ③  $16MR^2$
- ④  $\frac{47}{5}MR^2$
- ⑤  $\frac{82}{5}MR^2$

개념 POINT

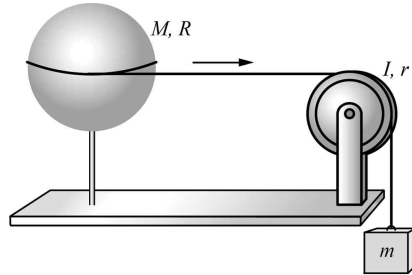
25. 질량이  $M$ 이고 반지름이  $R$ 인 균일한 원반이 수평으로 놓여 있는 축을 중심으로 자유롭게 회전할 수 있도록 매달려 있다. 원반의 가장자리에 감겨 있는 실의 끝에 질량  $M$ 인 추를 매달아 추의 무게에 의해 원반이 회전하면서 추가 낙하할 때 추의 가속도 크기는 얼마인가? 모든 마찰과 공기 저항은 무시하며 중력가속도는  $g$ 이다.<sup>25)</sup>



- ①  $\frac{1}{2}g$     ②  $\frac{2}{3}g$     ③  $\frac{3}{4}g$     ④  $\frac{4}{5}g$     ⑤  $g$

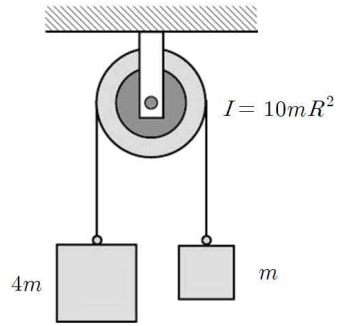
개념 POINT

26. 질량  $M$ , 반지름  $R$ 인 균일한 공껍질이 그림처럼 마찰이 없는 연직축에 대해 회전한다. 공껍질의 적도에는 질량이 없는 줄이 감겨서 회전 관성이  $I$ 이고, 반지름  $r$ 의 도르래를 지나 질량이  $m$ 인 작은 물체에 연결되어 있다. 도르래 축에는 마찰이 없고 줄은 도르래에서 미끄러지지 않는다. 정지 상태에 있던 물체가  $h$ 만큼 떨어졌을 때 물체의 속력은 얼마인가? (26)



개념 POINT

27. 그림과 같이 질량이 각각  $4m$ ,  $m$ 인 두 물체가 실로 연결되어, 반지름이  $R$ 이고 관성 모멘트가  $10mR^2$ 인 도르래에 걸쳐 있다.



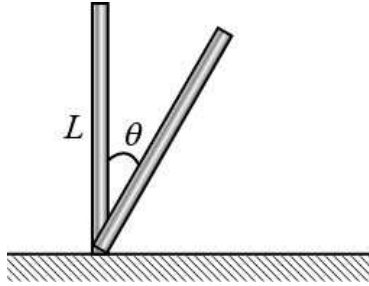
두 물체가 정지 상태에서 움직이기 시작하였을 때, 두 물체의 가속도의 크기는? (단, 실과 도르래는 미끄러지지 않으며, 중력 가속도는  $g$ 이다.)<sup>27)</sup>

- ①  $\frac{1}{5}g$
- ②  $\frac{1}{4}g$
- ③  $\frac{1}{2}g$
- ④  $\frac{3}{5}g$
- ⑤  $\frac{3}{4}g$

개념 POINT

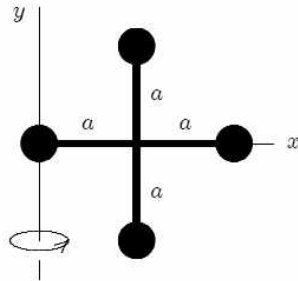
28. 질량  $M$ 이고 길이가  $L$ 인 막대가 정지한 상태로 서 있다가 바닥과의 접촉점을 중심으로 회전하며 그림과 같이 바닥으로 쓰러지고 있다.<sup>28)</sup>

개념 POINT



- (1) 막대가 처음과  $\theta$ 각을 이루는 순간의 각가속도(angular acceleration)를 구하시오. (중력가속도는  $g$ 이고, 막대의 회전관성은  $I = \frac{1}{3}ML^2$ 임.)
- (2) 막대가 바닥에 닿는 순간의 각속도(angular velocity)를 구하시오.

29. 질량이  $m$ 인 4 개의 동일한 입자가  $xy$ 평면에 그림과 같이 분포해 있다. 입자들은 가볍지만 변형이 거의 되지 않는 막대로 연결되어 있다.  $m = 2.0\text{kg}$ ,  $a = 1.0\text{m}$ 일 때  $y$ 축에 대한 회전 관성은 얼마인가?29)

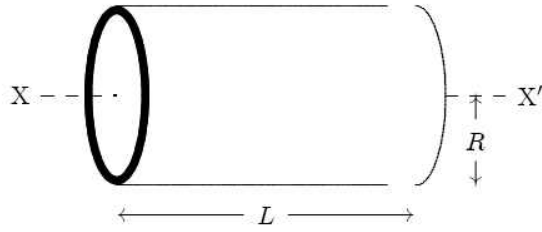


- ①  $4.0\text{kg m}^2$
- ②  $12\text{kg m}^2$
- ③  $9.6\text{kg m}^2$
- ④  $4.8\text{kg m}^2$
- ⑤ 위에 답이 없다.

개념 POINT

30. 그림과 같이 질량  $M$ , 반지름  $R$ , 길이  $L$ 인 얇은 원통 껍질의  $(X-X')$  축에 대한 회전 관성은 얼마인가?<sup>30)</sup>

개념 POINT

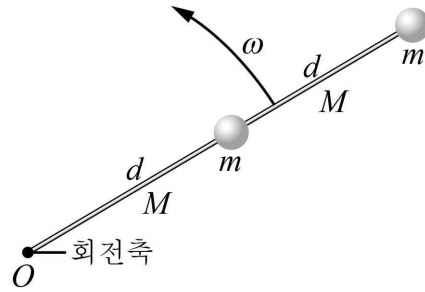


- ①  $MR^2/2$
- ②  $ML^2/2$
- ③  $ML^2$
- ④  $MR^2$
- ⑤ 위에 답이 없다.



31. 그림에서 질량  $m$ 의 두 입자가 두 막대에 연결되어 회전축  $O$ 에 대하여 회전한다. 두 막대는 길이  $d$ , 질량  $M$ 으로 같고 각속력은  $\omega$ 이다. 축  $O$ 에 대한 강체의<sup>31)</sup>

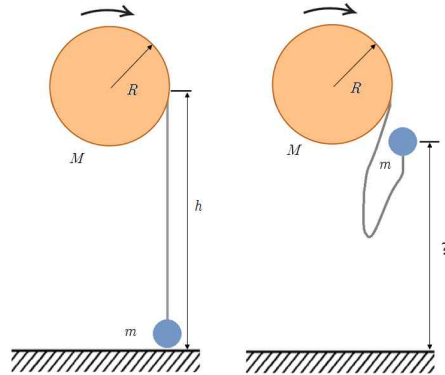
개념 POINT



- (1) 회전관성과
- (2) 운동에너지는 각각 얼마인가?

32. 질량  $M$ 이 반지름  $R$ 의 원판에 균일한 밀도로 분포하는 도르래의 주변으로 여러 번 감긴 줄 끝에 질량  $m$ 인 쇠공이 달려있다. 도르래와 쇠공이 정지해 있다가 중력에 의해 쇠공이 높이  $h$ 만큼 낙하한 후 바닥과 탄성충돌을 하였을 때 튀어 오르는 최대 높이를 구하시오.<sup>32)</sup>

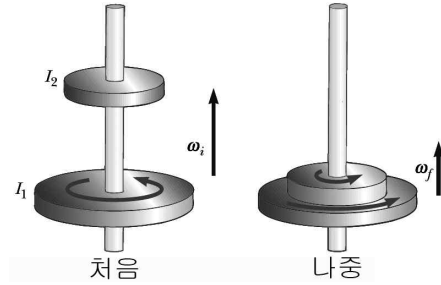
개념 POINT



- ①  $h$
- ②  $\frac{m}{M}h$
- ③  $\frac{m}{m+M}h$
- ④  $\frac{M}{m+M}h$
- ⑤  $\frac{2m}{2m+M}h$

33. 두 원반의 관성 모멘트는 각각  $I_1$ 과  $I_2$ 이며 한 원반은 각속력  $\omega_i$ 로 회전하고 다른 원반은 정지해 있다. 두 원반을 서로 붙일 때 두 원반 사이의 마찰에 의해 두 원반은 결국에는 나중 각속력  $\omega_f$ 로 같이 회전할 것이다.<sup>33)</sup>

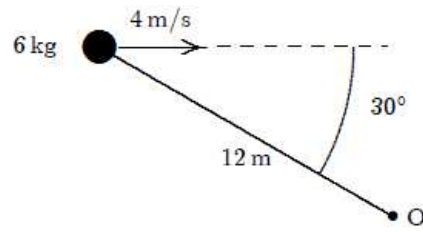
개념 POINT



- (1)  $\omega_f$ 를 구하라.
- (2) 회전 운동 에너지가 줄어들었음을 보이고 처음 에너지와 나중 에너지의 비를 구하라.

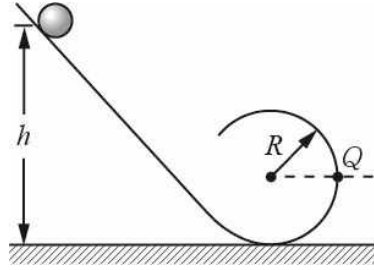
34. 6.0kg인 물체가 오른쪽으로 4.0m/s의 속도로 그림과 같이 운동하고 있다. 점 O에 대한 각운동량의 크기는? <sup>34)</sup>

개념 POINT



- ① 0
- ②  $288 \text{ kg m}^2/\text{s}$
- ③  $144 \text{ kg m}^2/\text{s}$
- ④  $24 \text{ kg m}^2/\text{s}$
- ⑤  $249 \text{ kg m}^2/\text{s}$

35. 질량  $m$ 의 균일한 구슬이 그림처럼 궤도 직선 부분의 어느 점에서 정지상태로부터 출발하여 미끄러지지 않고 구른다. 원형 궤도의 반지름은  $R$ 이고 구슬의 반지름  $r$ 은  $R$ 보다 아주 작다.<sup>35)</sup>



- (1) 구슬이 원형 궤도의 꼭대기에서 궤도를 이탈하지 않기 위해서는 처음에 구슬이 출발하는 높이는 얼마이상이어야 하는가?

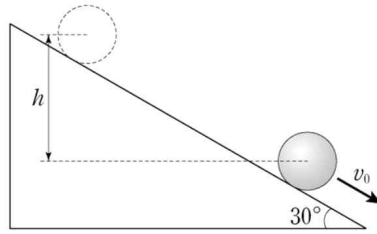
구슬이  $h = 6.00R$ 의 높이에서 출발했다면 점  $Q$ 에서 공에 수평으로 작용하는 힘의

- (2) 크기와

- (3) 방향은 각각 무엇인가?

개념 POINT

36. 그림은 반지름이  $R$ , 질량이  $M$ , 관성모멘트가  $\frac{2}{3}MR^2$ 인 구껍질 공을 경사각이  $30^\circ$ 인 경사면에 가만히 놓았을 때, 공이 미끄러짐 없이 경사면을 따라 굴러 내려가는 것을 나타낸 것이다. 수직방향으로  $h$ 만큼 이동했을 때 공의 중심의 속력은  $v_0$ 이다. 이에 대한 설명으로 옳은 것만을 <보기>에서 있는대로 고른 것은? (단, 중력가속도는  $g$ 이다.)<sup>36)</sup>



<보 기>

ㄱ.  $v_0 = \sqrt{\frac{6}{5}gh}$ 이다.

ㄴ. 공 중심의 가속도 크기는  $\frac{2}{5}g$ 이다.

ㄷ. 경사면과 공 사이의 마찰력의 크기는  $\frac{Mg}{5}$ 이다.

① ㄴ, ㄷ

② ㄱ, ㄴ

③ ㄱ

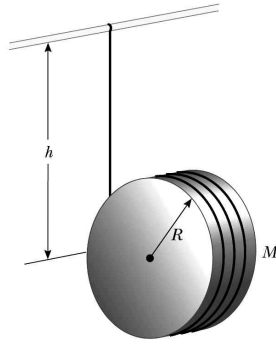
④ ㄴ

⑤ ㄱ, ㄷ

개념 POINT

37. 반지름  $R$ , 질량  $M$ 인 균일한 원판에 줄을 감아서 줄 끝을 고정된 막대에 묶었다. 원판이  $h$ 만큼 낙하했을 때 다음을 구하라.<sup>37)</sup>

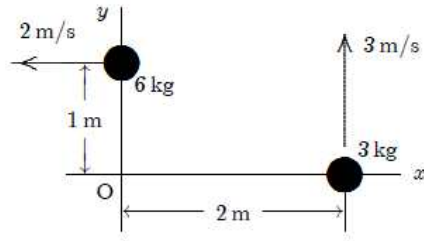
개념 POINT



- (1) 줄의 장력
- (2) 질량 중심의 가속도
- (3) 질량 중심의 속력

38. 두 물체가  $x, y$ 평면 위를 그림과 같이 움직이고 있다. 점  $O$ 에 대한 전체 각운동량의 크기는? <sup>38)</sup>

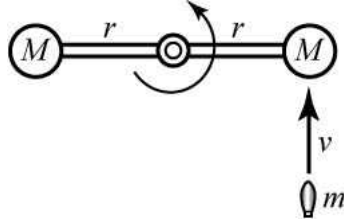
개념 POINT



- ① 0
- ②  $6\text{ kg m}^2/\text{s}$
- ③  $12\text{ kg m}^2/\text{s}$
- ④  $30\text{ kg m}^2/\text{s}$
- ⑤  $78\text{ kg m}^2/\text{s}$

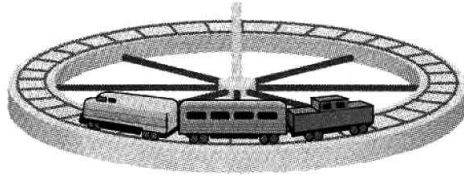


39. 길이가  $0.2\text{m}(=2r)$ 인 가벼운 막대의 양쪽에 나무로 만들어진 공(질량  $M=1\text{kg}$ )을 연결하고 막대의 중심부를 회전할 수 있도록 하였다. 질량이  $m=0.1\text{kg}$ 인 총알을 나무 공에 발사하였더니 나무 공에 총알이 박혀 회전하였다. 회전축에는 마찰이 존재하여  $-5\text{rad/sec}^2$ 의 일정한 각가속도가 작용하였으며, 총알이 박힌 계가  $40\text{rad}$ 만큼 회전하고 멈추었다. 총알의 속력을 구하여라.<sup>39)</sup>



개념 POINT

40. 장난감 기차 궤도가 수직축에 대하여 마찰없이 자유롭게 돌 수 있는 커다란 바퀴 위에 그림처럼 올려져 있다. 질량  $m$ 의 장난감 기차가 궤도 위에 처음에는 정지해 있다가 전기 동력이 켜진 다음에 움직여서 바퀴 위의 궤도에 대하여 일정한 속력  $v$ 에 도달한다. 바퀴의 질량이  $M$ 이고 반지름이  $R$ 라면 바퀴의 각속도는 얼마인가? (바퀴를 원형고리로 취급하고 바퀴살과 축의 질량을 무시하여라.)<sup>40)</sup>



개념 POINT

■ 정답과 해설

개념 POINT

1) [정답] ④

[해설]

Step 1: 역학적 에너지 보존법칙 적용

경사면 꼭대기에서의 위치에너지가 바닥에서의 총운동에너지(병진+ 회전)로 전환되므로

$$Mgh = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \text{이다.}$$

미끄러지지 않고 구르므로  $v = R\omega$ 이고 관성모멘트를  $I = \beta MR^2$ 이라고 하면

$$Mgh = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}(\beta MR^2)\left(\frac{v}{R}\right)^2 = \frac{1}{2}Mv^2(1 + \beta) \text{이다.}$$

Step 2: 바닥에서의 속력 ( $v$ ) 분석

위 식에서 속력에 대해 정리하면  $v = \sqrt{\frac{2gh}{1+\beta}}$  이므로  $\beta$ 가 작을수록  $v$ 가 커지고 바닥에 빨리 도달하게 된다. 따라서 회전운동에너지에 관계없이  $\beta$ 가 제일 작은 속이 짝 찬 구가 가장 먼저 바닥에 도달한다.

Step 3: 회전에너지와의 관계

$\beta$ 값이 작다는 것은 관성모멘트  $I$ 가 작다는 뜻이고, 이는 전체에너지 중 회전운동에너지( $\frac{1}{2}I\omega^2$ )로 배분되는 비율이 작다는 것을 의미한다. 즉, 에너지가 병진운동(앞으로 나아가는 운동)에 더 많이 집중되기 때문에 더 빠른 것이다.

2) [정답] ④

[해설]

Step 1: 관성모멘트 구하기

두꺼운 고리(원통)의 관성모멘트는 내반경이  $R_1$ 이고 외반경이  $R_2$ 일 때  $I = \frac{1}{2}MR_1^2 + \frac{1}{2}MR_2^2$ 이

$$\text{므로 } I = \frac{1}{2}M\left[\left(\frac{R}{2}\right)^2 + R^2\right] = \frac{5}{8}MR^2 \text{이다.}$$

Step 2: 역학적 에너지 보존법칙 적용

경사면 꼭대기에서의 위치에너지가 바닥에서의 병진 운동에너지와 회전 운동에너지의 합과 같으므로  $Mgh = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$ 이 성립한다. 또한 미끄러짐 없이 구르므로  $v = R\omega$ 이다.

$$\text{따라서 각각의 값을 대입하면 } Mgh = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{5}{8}MR^2\right)\left(\frac{v}{R}\right)^2 = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{5}{16}Mv^2 = \frac{13}{16}Mv^2 \text{이}$$

$$\text{다. 양변을 소거하여 정리하면 } v = \sqrt{\frac{16gh}{13}} \text{이다.}$$

3) [정답] ③

[해설]

이 문제는 물체가 쓰러지지 않고 균형을 유지할 수 있는 역학적 평형(안정성) 조건을 묻는 문제이다. 위에서부터 순차적으로 벽돌이 떨어지지 않을 극한의 조건을 찾아야 한다.

개념 POINT

1. 맨 위 벽돌의 평형조건( $a_2$ 구하기)

맨 위의 벽돌이 그 아래 벽돌에서 떨어지지 않으려면, 맨 위 벽돌의 질량중심이 아래 벽돌의 끝단보다 바깥으로 나가면 안된다. 벽돌의 길이는  $L$ 이므로 질량중심은  $\frac{L}{2}$  지점에 있고 따라서 아래 벽돌로부터 튀어나올 수 있는 최대길이는  $a_2 = \frac{L}{2}$ 이다.

2. 전체(두 벽돌)의 평형조건( $a_1$ 구하기)

두 벽돌이 함께 테이블에서 떨어지지 않으려면, 두 벽돌 전체의 합성 질량중심이 테이블의 끝단( $a_1$ 의 기준점)보다 바깥으로 나가면 안된다.

각 벽돌의 질량을  $m$ 이라 하고, 테이블 끝단을 원점(0)으로 잡았을 때

- 맨 위 벽돌의 중심위치 :  $x_2 = a_2 - \frac{L}{2} + a_1 = \frac{L}{2} - \frac{L}{2} + a_1 = a_1$ (아래 벽돌 끝에 걸쳐 있을 때 기준)

- 아래 벽돌의 중심위치 :  $x_1 = a_1 - \frac{L}{2}$

두 벽돌의 합성 질량중심  $x_{cm} = \frac{m \times x_1 + m \times x_2}{2m} = \frac{(a_1 - \frac{L}{2}) + a_1}{2} = \frac{2a_1 - \frac{L}{2}}{2} = a_1 - \frac{L}{4}$ 이고

이  $x_m$ 이 테이블 끝단(0)에 위치할 때가  $a_1$ 이 최대일 때이다.

3. 최종 계산

구하고자 하는 값은  $a_1 + a_2$ 의 최댓값이므로  $a_1 + a_2 = \frac{L}{4} + \frac{L}{2} = \frac{3}{4}L$ 이다.

4) [정답] ③

[해설]

핵심 이론: 평행축정리

질량중심을 지나는 축에 대한 관성모멘트를  $I_{cm}$ , 질량중심에서  $d$ 만큼 떨어진 평행한 축에 대한 관성모멘트를  $I$ 라고 할 때  $I = I_{cm} + Md^2$ 이 성립한다.

Step 1: 질량중심(CM)에 대한 관성모멘트 구하기

균일한 막대의 질량중심은 막대의 정중앙(7.5cm 지점)에 있다. 점 A는 막대의 끝이므로 질량중심으로부터  $d_A = 7.5cm$  떨어져 있다.

$I_A = I_{cm} + M(d_A)^2$ 에서  $5,000 = I_{cm} + 20 \times (7.5)^2$ 에서  $I_{cm} = 3,875 g \cdot cm^2$ 이다.

Step 2: 지점 B에 대한 관성모멘트 구하기

지점 B는 점 A로부터 10cm 떨어져 있다. 질량중심(중앙 7.5cm 지점)에서 지점 B(10cm 지점)까지의 거리  $d_B = 2.5cm$ 이므로 여기에 평행축 정리  $I_B = I_{cm} + M(d_B)^2$ 를 적용하면

$I_B = 3,875 + 20 \times (2.5)^2 = 4,000 g \cdot cm^2$ 이다.

5) [정답] ④

[해설]

막대의 높이는 피타고라스 정리에 의하여  $3m$ 이다. 막대에는 연직 방향의 중력  $Mg$ 와 오른쪽 방향의 왼쪽 벽에서 받는 수직항력  $N_1$ , 점  $A$ 에서 막대방향으로  $F_A$ 의 힘을 받는다.

1. 힘 평형

점  $A$ 에서 작용하는 힘  $F_A$ 의 수평성분을  $F_x$ , 수직성분을  $F_y$ 라고 하면  $N_1 - F_x = 0$ ,  $F_y - Mg = 0$ 이다.

2. 돌림힘 평형

점  $A$ 를 회전축으로 하고 막대가 수평면과 이루는 각을  $\theta$ 로 할 때 반시계 방향을 +하면  $\Sigma \tau = 2.5 \times \cos \theta \times Mg - 5 \times \sin \theta \times N_1 = 0$  이고  $\cos \theta = \frac{4}{5}$ ,  $\sin \theta = \frac{3}{5}$ 를 대입하여 정리하면  $N_1 = \frac{2}{3}Mg$ 이다.

따라서  $F_x = N_1 = \frac{2}{3}Mg$ 이고  $F_y = Mg$ 이므로  $F_A = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{3}Mg\right)^2 + (Mg)^2} = \frac{\sqrt{13}}{3}Mg$ 이다.

6) [정답] ③

[해설]

문제풀이과정

이 문제는 계의 가속도( $a$ )를 먼저 구한 뒤, 도르래의 회전운동방정식을 이용하여 장력의 차이를 구하는 순서로 해결할 수 있다.

단계 1 : 각 물체의 운동방정식 세우기

계가 가속도  $a$ 로 움직인다고 할 때, 각 부분의 운동방정식은

① A :  $T_1 - f_k = ma$  에서  $T_1 - \mu mg = ma$

② B :  $mg - T_2 = ma$

③ 도르래 :  $\Sigma \tau = (T_2 - T_1)R = I\alpha = I\frac{a}{R} = \frac{1}{2}mR^2 \times \frac{a}{R} = \frac{1}{2}mRa$  이므로  $T_2 - T_1 = \frac{1}{2}ma$ 이다.

단계 2: 계 전체의 가속도( $a$ ) 구하기

위의 세 식을 더하여 장력을 소거하면  $mg - \mu mg = \frac{5}{2}ma$  이므로

$$a = \frac{2}{5}(1 - \mu)g = \frac{2}{5}(1 - 0.2)g = 0.32g \text{이다.}$$

따라서  $T_2 - T_1 = \frac{1}{2}ma = 0.16mg$  이다.

7) [정답] ④

[해설]

개념 POINT

$\Sigma \tau = I\alpha$ 에서 세 물체 모두  $\Sigma \tau = +RF$ 로 동일하므로 물체의 각가속도의 크기는 관성모멘트의 크기에 반비례한다.  $I_{\text{원형고리}} > I_{\text{원판}} > I_{\text{속이 찬구}}$ 이므로  $\alpha_{\text{원형고리}} < \alpha_{\text{원판}} < \alpha_{\text{속이 찬구}}$ 이다.

8) [정답] ⑤

[해설]

ㄱ. 원형 고리의 관성모멘트 분석(오답)

원형 고리는 모든 질량이 중심에서 거리  $R$ 만큼 떨어진 곳에 분포하므로, 관성모멘트  $I = MR^2$ 이다.

ㄴ. 바닥에서의 속도  $v$  계산(정답)

미끄러지지 않고 구르는 경우 역학적 에너지가 보존된다. (위치에너지 = 병진운동에너지 + 회전운동에너지)

$$Mgh = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \text{에서 굴림조건 } v = R\omega \text{와 } I = MR^2 \text{를 대입하면}$$

$$Mgh = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}Mv^2 = Mv^2 \text{이므로 } v = \sqrt{gh} \text{이다.}$$

ㄷ. 마찰력이 한 일 분석(정답)

물체가 미끄러지지 않고 구를 때 작용하는 마찰력은 정지마찰력이고 이 때 접촉점의 순간속도가 0인 지점에 작용하여 물체를 회전시키는 토크를 발생시키지만, 접촉점의 변위가 없으므로 에너지를 소모하는 일(Work)은 하지 않는다. 따라서 계의 전체 역학적 에너지는 보존된다.

9) [정답] ②

[해설]

Step1 : 진흙 덩어리의 충돌 직전 속력( $v$ ) 구하기

진흙이 높이  $h = 2.5\text{m}$ 에서 내려오므로 역학적 에너지 보존법칙을 적용하면  $mgh = \frac{1}{2}mv^2$  이므로  $v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \times 9.8 \times 2.5} = \sqrt{49} = 7\text{m/s}$  이다.

Step2 : 각운동량 보존법칙 적용

충돌과정에서 회전축O에 대한 외부 토크가 없으므로 각운동량이 보존된다.

- 충돌 전 각운동량 : 직선 운동하는 진흙의 각운동량만 존재한다. 따라서

$$L_i = rmv = 0.5 \times 1 \times 7 = 3.5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$$

- 충돌 후 각운동량 : 진흙이 구슬에 붙어 함께 회전하고 막대의 질량은 무시하므로, 회전하는 총 관성모멘트  $I$ 는 세 입자(구슬 2개 + 진흙 1개)의 합이다.

$$I = (m_{\text{구슬}} + m_{\text{구슬}} + m_{\text{진흙}}) \times r^2 = (1 + 1 + 1) \times 0.5^2 = 0.75 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \text{이므로}$$

$$L_f = I\omega = 0.75 \times \omega \text{ 이다.}$$

Step 3: 각속도( $\omega$ ) 계산

$L_i = L_f$  에서  $3.5 = 0.75 \times \omega$  이므로  $\omega = \frac{3.5}{0.75} = \frac{14}{3} \simeq 4.7$ 이다.

10) [정답] ④

[해설]

Step1 : 막대에 작용하는 토크( $\tau$ ) 계산

막대를 수평으로 놓은 순간, 막대에 작용하는 유일한 토크는 막대의 무게(중력)에 의한 것이므로  $\tau = \frac{L}{2} \times Mg$ 이다.

Step2 : 막대의 관성모멘트( $I$ ) 확인

막대의 끝을 회전축으로 할 때, 균일한 막대의 관성모멘트  $I = \frac{1}{3}ML^2$ 이다.

Step3 : 각가속도( $\alpha$ ) 구하기

$\Sigma \tau = I\alpha$ 에서  $\frac{L}{2} \times Mg = \left(\frac{1}{3}ML^2\right)\alpha$  이므로  $\alpha = \frac{3g}{2L}$ 이다.

Step4 : 막대 끝의 접선가속도( $a_t$ ) 계산

$a_t = r\alpha = L \times \left(\frac{3g}{2L}\right) = \frac{3g}{2}$  이다.

11) [정답] ④

[해설]

핵심원리

각운동량의 크기  $L$ 은 관성모멘트  $I$ 와 각속도 $\omega$ 의 곱이다( $L = I\omega$ ). 이 구조물은 원형고리와 정삼각형 막대로 구성되어 있으므로, 각각의 관성모멘트를 구해 더해야 한다.

Step1 : 원형고리의 관성모멘트

$$L_{\text{고리}} = M_{\text{고리}} R^2 = (\mu \times 2\pi R) \times R^2 = 2\pi \mu R^3$$

Step 2: 정삼각형 막대의 관성모멘트

정삼각형은 세 개의 동일한 막대로 이루어져 있으므로 한 막대의 관성모멘트를 구해 3배를 한다. 반지름  $R$ 인 원에 내접하는 정삼각형의 한변의 길이는  $\sqrt{3}R$ 이므로 한 막대의 질량은

$m = \sqrt{3}\mu R$ 이다. 이 때 회전축에서 막대중심까지의 수직거리는  $d = R \sin 30^\circ = \frac{1}{2}R$ 이다.

회전축에 대한 정삼각형의 관성모멘트는 평행축 정리에 의하여

$$I_{\text{정삼각형}} = \left[ \frac{1}{12} m (\sqrt{3}R)^2 + m \left( \frac{1}{2}R \right)^2 \right] \times 3 = \frac{3}{2} m R^2 = \frac{3}{2} \times \sqrt{3}\mu R \times R^2 = \frac{2\sqrt{3}}{2} \mu R^3 \text{ 이다.}$$

Step3 : 전체 각운동량( $L$ ) 계산

$$I_{\text{전체}} = I_{\text{고리}} + I_{\text{정삼각형}} = 2\pi\mu R^3 + \frac{2\sqrt{3}}{2}\mu R^3 = \left(2\pi + \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)\mu R^3 \text{이므로}$$

$$L = I_{\text{전체}}\omega = \left(2\pi + \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)\mu R^3\omega \text{ 이다.}$$

12) [정답] 정답 없음

[해설]

줄의 장력을  $T$ ,  $m$ 의 가속도를  $a$ , 도르래의 각가속도를  $\alpha$ 라고 하면

- ① 운동방정식 :  $\Sigma F = mg - T = ma$
- ② 토크방정식 :  $\Sigma \tau = I\alpha$ 에서  $TR = I\alpha$
- ③ 구속조건 :  $a = R\alpha$

$$\alpha = \frac{a}{R} \text{이므로 } TR = I\alpha \text{에 대입하면 } T = \frac{I}{R^2}a \text{ 이다. 이를 } mg - T = ma \text{ 대입하여 정리하면}$$

$$mg - \frac{I}{R^2}a = ma \text{ 이므로 } a = \frac{mg}{m + \frac{I}{R^2}} = \frac{g}{1 + \frac{I}{mR^2}} = \frac{15}{4}m/s^2 \text{이다.}$$

④ 도르래가 10회전 하는 동안 내려간 거리  $s = 2\pi R \times 10 = 12\pi m$ 이다.

$$\textcircled{5} \quad s = \frac{1}{2}at^2 \text{에서 } t = \sqrt{\frac{2s}{a}} \text{이므로 } t = \sqrt{\frac{\frac{2 \times 12\pi}{g}}{1 + \frac{I}{mR^2}}} = \sqrt{24\pi \times \frac{1 + \frac{I}{mR^2}}{g}} = \sqrt{6.4\pi} \text{초이다.}$$

13) [정답] ㉡

[해설]

충돌 과정에서 회전축에 대한 외부 토크가 없으므로, 충돌 전 전체 각운동량의 합은 충돌 후 전체 각운동량의 합과 같다. 문제에서 충돌 후 두 물체가 정지했다고 했으므로, 충돌 후 각운동량은 0이다.

Step1 : 충돌 전 각 물체의 각운동량 계산

회전축(막대의 끝)을 기준으로 각운동량을 설정하면

- 회전하는 막대의 각운동량  $L_{\text{막대}} = I_{\text{막대}}\omega = \frac{1}{3}ML^2\omega$  (반시계 방향)
- 운동하는 입자의 각운동량  $L_{\text{입자}} = rmv = \left(\frac{L}{2}\right)mv$  (시계 방향)

Step2 : 각운동량 보존법칙 적용

충돌 후 정지했으므로 충돌 전 두 각운동량의 크기는 같고 방향은 반대이므로

$$\frac{1}{3}ML^2\omega = \frac{L}{2}mv \text{이고 정리하면 } v = \frac{2ML\omega}{3m} \text{이다.}$$



14) [정답] ④

[해설]

이 문제는 질량중심의 정의를 이용하여 해결할 수 있다. 전체 사각형에서 일부를 떼어 냈을 때 남은 부분의 질량중심을 찾는 문제이다.

1. 질량 설정

밀도가 균일하므로 질량은 면적에 비례한다. 전체 정사각형의 질량을  $4M$ 이라고 하면, 잘라낸 A부분의 질량은  $M$ , 남은 B부분의 질량은  $3M$ 이 된다.

2. 각 부분의 질량중심 좌표

- 전체 사각형 (A+B) : 한변이  $8cm$ 이므로 질량중심은 중앙인  $(4, 4)$ 이다.
- A 부분 : 0부터 4까지인 정사각형이므로 질량중심은 그중앙인  $(2, 2)$ 이다.
- B 부분 : 우리가 구하고자 하는 질량중심 좌표를  $(x_B, y_B)$ 라고 하자.

3. 질량중심 공식 적용

전체 질량중심은 각 부분의 질량중심의 가중평균이므로  $x_{\text{전체}} = \frac{m_A x_A + m_B x_B}{m_A + m_B}$  이고 좌표에 대입하여 계산하면  $4 = \frac{M \times 2 + 3M \times x_B}{4M}$  이다. 따라서  $x_B = \frac{14}{3}$  이고 대칭성에 의해  $y_B = \frac{14}{3}$  이다.

4. 결론

따라서 남아 있는 B부분의 질량중심의 좌표는  $(\frac{14}{3}, \frac{14}{3})$ 이다.

15) [정답] ①

[해설]

Step1 : 힘의 분석(Free Body Diagram)

사다리에 작용하는 힘들을 분석해 보면

- ① 중력 : 사다리의 무게  $mg$ 와 사람의 무게  $Mg$ 가 모두 사다리의 중앙( $l/2$ 지점)에 작용한다.
- ② 바닥의 수직항력( $N_b$ ) : 바닥이 사다리를 위로 떠받치는 힘.
- ③ 바닥의 마찰력( $f$ ) : 사다리가 왼쪽으로 미끄러지는 것을 막는 오른쪽 방향의 힘.
- ④ 벽의 수직항력( $N_w$ ) : 벽이 사다리를 왼쪽으로 미는 힘(벽면 마찰은 없음).

Step2 : 평형 조건식 세우기

- ① 수평 방향 힘의 평형 :  $f = N_w$
- ② 수직 방향 힘의 평형 :  $N_b = (M+m)g$
- ③ 미끄러지지 않을 조건 :  $f \leq \mu_s N_b$  에서  $N_w \leq \mu_s (M+m)g$

Step3 : 돌림힘(Torque)의 평형 적용

바닥 지점을 회전축으로 잡으면 계산이 가장 간단하다. 반시계 방향을 +로 하면

개념 POINT

$$\Sigma \tau = l \sin \theta \times N_w - \frac{l}{2} \cos \theta (M+m)g = 0 \quad \text{이므로} \quad N_w = \frac{(M+m)g}{2 \tan \theta} \text{이다.}$$

Step4 : 도출

$$N_w \leq \mu_s (M+m)g \text{에 } N_w = \frac{(M+m)g}{2 \tan \theta} \text{를 대입하여 정리하면 } \tan \theta \geq \frac{1}{2\mu_s} \text{이다.}$$

16) [정답] ②

[해설]

Step 1 : 알짜일-회전운동에너지정리(회전) 적용

동일한 토크( $\tau$ )를 동일한 각도( $\theta$ )까지 가했다는 것은 두 강체에 해준 회전일( $W = \tau\theta$ )이 같다는 뜻이고 이는 알짜일-회전운동에너지 변화량 정리에 의해 강체의 회전운동에너지

( $K_{rot} = \frac{1}{2} I \omega^2$ )의 변화량과 같다.

- (가)의 나중 회전운동에너지 :  $W = \frac{1}{2} I_A (2\omega)^2 = 2I_A \omega^2$
- (나)의 나중 회전운동에너지 :  $W = \frac{1}{2} I_A \omega^2$
- 두 에너지가 같으므로  $2I_A \omega^2 = \frac{1}{2} I_B \omega^2$ 에서  $4I_A = I_B$ 이다.

Step 2 : 각 강체의 관성모멘트( $I$ ) 구하기

$$I_A = \frac{2}{5} MR^2 \text{이고 } I_B = I_A + I_{\text{중리}} = \frac{2}{5} MR^2 + mR^2 \text{이다.}$$

Step 3 : 질량비 계산

$$4I_A = I_B \text{이므로 } 4 \times \frac{2}{5} MR^2 = \frac{2}{5} MR^2 + mR^2 \text{이고 정리하면 } \frac{M}{m} = \frac{5}{6} \text{이다.}$$

17) [정답] ④

[해설]

핵심원리 : 돌림힘(Torque)의 평형

막대가 수평으로 정지해 있으므로 임의의 지점을 회전축으로 잡았을 때 모든 돌림힘의 합은 0이다.

Step1 : 회전축 설정 및 힘 분석

계산을 간단히 하기 위해 막대의 오른쪽 끝(벽과 닿아 있는 지점)을 회전축으로 설정하면 벽이 막대를 미는 항력에 의한 돌림힘을 고려하지 않아도 된다. 반시계방향을 +로 하면

$$\Sigma \tau = +2L \times mg + (-3L \times F_1) = 0 \quad \text{이고 정리하면 } F_1 = \frac{2}{3} mg \text{이다.}$$

Step2 : 수직방향 힘의 평형(두번째조건)

개념 POINT

개념 POINT

회전축을 오른쪽 끝으로 잡았을 때  $F_2$ 가 소거되므로,  $F_1$ 과  $F_2$ 의 관계를 찾기 위해 수직방향의 힘의 평형을 이용하면 위 방향을 +로 했을 때

$\Sigma F = F_1 + F_2 \sin 45^\circ - mg = 0$  이므로  $F_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} F_2 = mg$ 이다.  $F_1 = \frac{2}{3}mg$ 이므로 대입하여 정리

하면  $F_2 = \frac{\sqrt{2}}{3}mg$  이다. 따라서  $\frac{F_1}{F_2} = \frac{\frac{2}{3}mg}{\frac{\sqrt{2}}{3}mg} = \sqrt{2}$ 이다.

18) [정답] ④

[해설]

1. 받침점을 회전축으로 하면 받침대에 작용하는 힘은 다음과 같다.

- ① 지점 a에서 지지대가 누르는 힘  $F$
- ② 받침대의 무게  $200N$
- ③ 물체가 지지대를 누르는 힘  $500N$

2. 위의 세 힘은 돌림힘 평형을 이루므로 반시계 방향을 +로 하면

$\Sigma \tau = 1.0 \times F - 0.5 \times 200 - 2.0 \times 500 = 0$  이므로 정리하면  $F = 1100N$ 이다.

19) [정답] ①

[해설]

① 고리의 병진 운동에너지 :  $K_{\text{병진}} = \frac{1}{2}Mv^2$

② 고리의 회전 운동에너지 :  $K_{\text{회전}} = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2} \times (MR^2) \times \left(\frac{v}{R}\right)^2 = \frac{1}{2}Mv^2$  ( $\because v = R\omega$ )

따라서 총 운동에너지는  $Mv^2$ 이다.

20)

[정답] ③  $x_{cm} = 1.4\text{m}$ ,  $y_{cm} = 1.9\text{m}$

[해설]

$$x_{cm} = \frac{\sum mx}{\sum m} = \frac{(4\text{kg})(0) + (6\text{kg})(1\text{m}) + (5\text{kg})(3\text{m})}{4\text{kg} + 6\text{kg} + 5\text{kg}}$$

$$= \frac{21\text{kg m}}{15\text{kg}} = 1.4\text{m}$$

$$y_{cm} = \frac{\sum my}{\sum m} = \frac{(4\text{kg})(0) + (6\text{kg})(3\text{m}) + (5\text{kg})(2\text{m})}{4\text{kg} + 6\text{kg} + 5\text{kg}}$$

$$= \frac{28\text{kg m}}{15\text{kg}} = 1.8666\text{m} = 1.9\text{m}$$

21)

[정답] ① 초기에 정지해 있고 외력의 합이 0인 경우

[해설]

일단  $\vec{a}_{cm} = 0$ 이어야 한다.

$$\vec{a}_{cm} = \frac{\sum \vec{F}_{ext}}{M} = 0 \text{ 이면 } \vec{v}_{cm} = \text{일정}$$

이다. 따라서 " $\vec{v}_{cm} = 0$ "이기 위해서는, 처음에 정지해 있어야 한다.

22)

$$[\text{정답}] v = \sqrt{\frac{2(m_2 - m_1)gh}{m_1 + m_2 + I/R^2}} = R\omega$$

[해설] 나중 두 물체의 속력을  $v$ , 도르래의 회전 각속도를  $\omega$ 라 하자. 역학적 에너지 보존 법칙을 적용하면

$$0 = \frac{1}{2}m_1v^2 + \frac{1}{2}m_2v^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + m_1gh - m_2gh$$

$v = R\omega$ 를 써서 식을 정리하면,

$$v = \sqrt{\frac{2(m_2 - m_1)gh}{m_1 + m_2 + I/R^2}} = R\omega$$

23)

$$[\text{정답}] (1) Mx^2 + m(L-x)^2$$

(2) 회전축이 질량 중심을 지날 때

$$(3) I = \frac{Mm}{m+M}L^2$$

$$[\text{해설}] (1) I = Mx^2 + m(L-x)^2$$

$$(2) 0 = \frac{dI}{dx} = 2Mx - 2m(L-x)$$

$$\Rightarrow x : (L-x) = m : M$$

즉, 회전축이 질량 중심을 지날 때 회전 관성이 최소이다.

$$(3) x = \frac{mL}{m+M} \text{ 을 대입하여 회전 관성을 계산하면,}$$

$$\begin{aligned} I &= M\left(\frac{mL}{m+M}\right)^2 + m\left(L - \frac{mL}{m+M}\right)^2 \\ &= \frac{Mm}{m+M}L^2 \end{aligned}$$

24)

$$[\text{정답}] \textcircled{5} \frac{82}{5}MR^2$$

[해설]

$$\begin{aligned} I &= I_{cm} + Md^2 \\ &= \frac{2}{5}MR^2 + M(3R+R)^2 \\ &= \frac{2+80}{5}MR^2 \\ &= \frac{82}{5}MR^2 \end{aligned}$$

25)

$$[\text{정답}] \textcircled{2}$$

[해설]

장력을  $T$ , 가속도를  $a$ 라고하면 각가속도  $\alpha = \frac{a}{R}$ 이다.

개념 POINT

운동방정식은

$$Mg - T = Ma$$

$$TR = \frac{1}{2}MR^2\left(\frac{a}{R}\right)$$

위의 두 식을 연립하면

$$a = \frac{Mg}{M + \frac{1}{2}M} = \frac{2}{3}g \text{이다.}$$

26)

[정답]  $\sqrt{\frac{2mgh}{m + \frac{2}{3}M + \frac{I}{r^2}}}$

[해설] 감소한 중력 퍼텐셜 에너지  $mgh$ 가 운동 에너지로 전환된다. 물체의 속력이  $v$ 이면, 줄의 속력도  $v$ 이고 구각의 각속도는  $\Omega = \frac{v}{R}$ , 도르래의 각속도는  $\omega = \frac{v}{r}$ 이다. 따라서, 계의 운동 에너지는

$$K = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}MR^2\right)\Omega^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

$$= \frac{1}{2}\left(m + \frac{2}{3}M + \frac{I}{r^2}\right)v^2$$

$$= mgh$$

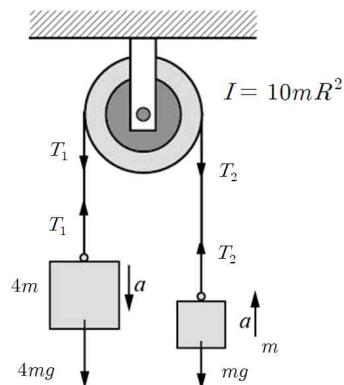
$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{2mgh}{m + \frac{2}{3}M + \frac{I}{r^2}}}$$

27)

[정답] ①  $\frac{1}{5}g$

[해설]

아래의 그림처럼 두 물체의 가속도를  $a$ 라 하고  $4m$ 에 걸린 장력을  $T_1$ ,  $m$ 에 걸린 장력을  $T_2$ 라 하자.



줄이 미끄러지지 않으므로 도르래의 각가속도는  $\alpha = \frac{a}{R}$ 이다.

운동방정식을 적으면 다음과 같다.

$$4mg - T_1 = 4ma. \quad \text{①}$$

$$T_1R - T_2R = 10mR^2\left(\frac{a}{R}\right)$$

$$\therefore T_1 - T_2 = 10ma. \quad \text{②}$$

$$T_2 - mg = ma. \quad \text{③}$$

개념 POINT

① + ② + ③을 계산하면

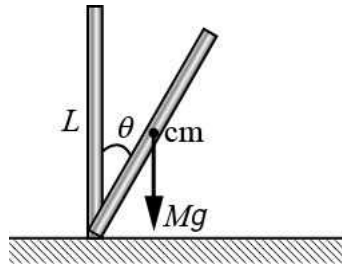
$$(4m - m)g = (4m + 10m + m)a$$

따라서  $a = \frac{1}{5}g$ 이다.

28)

[정답] (1)  $\frac{3g}{2L} \sin \theta$  (2)  $\sqrt{\frac{3g}{L}}$

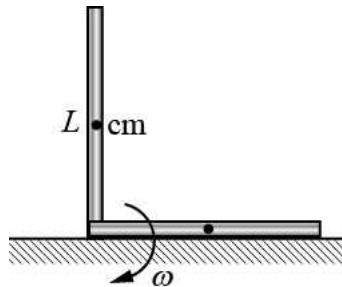
[해설] (1)



운동 방정식을 쓰면,  $\frac{1}{3}ML^2\alpha = \frac{L}{2}Mg \sin \theta$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{3g}{2L} \sin \theta$$

(2) 역학적 에너지 보존에서



$$Mg \cdot \frac{L}{2} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{3}ML^2 \right) \omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{3g}{L}}$$

29)

[정답] ②  $12 \text{ kg m}^2$

[해설]

$$\begin{aligned} I &= \sum m_i r_i^2 \\ &= m 0^2 + m a^2 + m a^2 + m (2a)^2 \\ &= 6ma^2 \\ &= 6(2.0 \text{ kg})(1.0 \text{ m})^2 \\ &= 12 \text{ kg m}^2 \end{aligned}$$

30)

[정답] ④  $MR^2$

[해설]

$I = \sum mr^2$ 이며  $r$ 은 회전축으로 부터의 질량  $m$ 인 물체까지의 거리이다.

이 경우 모든 질량이 회전축으로 부터  $R$ 만큼 떨어져 있으므로

$$I = \sum mr^2 = \left( \sum m \right) R^2 = MR^2 \text{이다.}$$

개념 POINT

31)

[정답] (1)  $\left(5m + \frac{8}{3}M\right)d^2$  (2)  $\frac{1}{2}\left(5m + \frac{8}{3}M\right)d^2\omega^2$

[해설]

$$(1) I = \frac{1}{3}Md^2 + md^2 + \left[\frac{1}{12}Md^2 + M\left(\frac{3d}{2}\right)^2\right] + m(2d)^2$$

$$= \left(5m + \frac{8}{3}M\right)d^2$$

(2) 운동 에너지는

$$K = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}\left(5m + \frac{8}{3}M\right)d^2\omega^2$$

32)

[정답] ⑤  $\frac{2m}{2m+M}h$

[해설] 충돌직전 속력을  $v$ 라고 하면

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{4}Mv^2 = mgh$$

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{1 + \frac{M}{2m}}}$$

$$h' = \frac{v^2}{2g} = \frac{h}{1 + \frac{M}{2m}}$$

33)

[정답] (1)  $\frac{I_1}{I_1 + I_2}\omega_i$  (2)  $\frac{I_1}{I_1 + I_2}$

[해설] (1) 외부 토크가 없으므로 계 전체의 각 운동량이 보존된다.

$$L_i = L_f \Rightarrow I_1\omega_i = (I_1 + I_2)\omega_f$$

$$\Rightarrow \omega_f = \frac{I_1}{I_1 + I_2}\omega_i$$

(2) 마찰에 의해 운동 에너지가 감소한다.

$$\frac{K_f}{K_i} = \frac{\frac{1}{2}(I_1 + I_2)\omega_f^2}{\frac{1}{2}I_1\omega_i^2} = \frac{I_1}{I_1 + I_2} < 1$$

34)

[정답] ③  $144\text{kg m}^2/\text{s}$

[해설]

위치벡터와 속도벡터가 이루는 각은  $150^\circ$ 이다.

$$L = v \sin\phi = (12\text{m})(6.0\text{kg})(4.0\text{m/s}) \sin 150^\circ$$

$$= 144\text{kg m}^2/\text{s}$$

35)

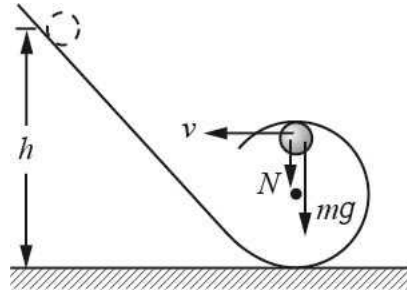
[정답] (1)  $2.7R$  (2)  $\frac{50}{7}mg$  (3) 원궤도 중심방향

[해설] (1) 원형궤도의 최고점에서 질량 중심의 속력을  $v$ 라 하면, 각속력은  $\omega = \frac{v}{R}$ 이

므로, 운동 에너지는

$$K = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}mR^2\right)\omega^2 = \frac{7}{10}mv^2$$

이 된다. 역학적 에너지 보존에서



$$K = \frac{7}{10}mv^2 = mg(h - 2R)$$

$$\Rightarrow v^2 = \frac{10}{7}g(h - 2R)$$

원궤도의 꼭대기에서 질량 중심의 운동 방정식을 쓰면, (질량 중심은 반지름  $R$ 의 원궤도를 도는 것으로 근사한다.)

$$N + mg = m\frac{v^2}{R}$$

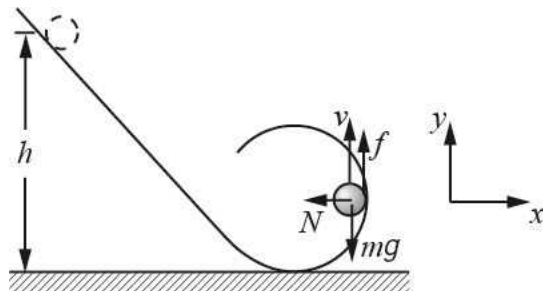
구슬이 원궤도에서 이탈하지 않으려면

$$N \geq 0 \Rightarrow m\frac{v^2}{R} - mg \geq 0 \Rightarrow v^2 \geq gR$$

$$\frac{10}{7}g(h - 2R) \geq gR$$

$$h \geq 2.7R$$

(2) (3) 공의 질량 중심의 속력은 역학적 에너지 보존에서



$$\frac{7}{10}mv^2 = mg \times 5R \Rightarrow v^2 = \frac{50}{7}gR$$

질량중심의 반지름 방향 운동 방정식을 쓰면,

$$N = m\frac{v^2}{R} = \frac{50}{7}mg$$

36)

[정답] ㉠, ㉡

[해설]

역학 에너지 보존에 의해

$$\frac{1}{2}Mv_0^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}MR^2\right)\left(\frac{v_0}{R}\right)^2 = Mgh \text{ 에서}$$



$$v_0 = \sqrt{\frac{6}{5}gh} \dots \textcircled{1}$$

이다.

마찰력을  $f$ , 가속도를  $a$ , 각가속도는  $\alpha = \frac{a}{R}$ 이라 하자.

$$Mg \sin \theta - f = Ma$$

$$fR = \frac{2}{3}MR^2\left(\frac{a}{R}\right)$$

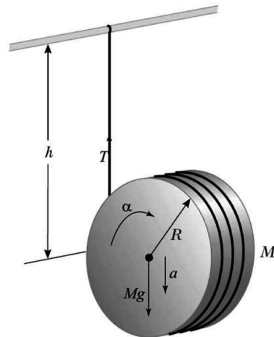
$$\text{에서 } a = \frac{Mg \sin \theta}{M + \frac{2}{3}M} = \frac{3}{5}g \sin \theta = \frac{3}{10}g \dots \textcircled{2}$$

$$f = \frac{2}{3}Ma = \frac{1}{5}Mg \dots \textcircled{3}$$

37)

$$[\text{정답}] (1) \frac{1}{3}Mg \quad (2) \frac{2g}{3} \quad (3) \sqrt{\frac{4gh}{3}}$$

[해설] (1) (2)



질량중심의 가속도를  $a$ , 각가속도를  $\alpha$ 라 하면,  $a = R\alpha$ 가 성립한다. 운동 방정식을 쓰면

$$Ma = Mg - T$$

$$\frac{1}{2}MR^2\alpha = RT \Rightarrow \frac{1}{2}Ma = T$$

두 식을 더하면

$$\frac{3}{2}Ma = Mg \Rightarrow a = \frac{2g}{3}$$

38)

$$[\text{정답}] \textcircled{4} 30 \text{ kg m}^2/\text{s}$$

[해설]

두 질점의 각운동량은 모두 반시계방향( $z$ 방향)이다.

$$\begin{aligned} L &= m_1 v_1 r_1 \sin 90^\circ + m_2 v_2 r_2 \sin 90^\circ \\ &= (6 \text{ kg})(2 \text{ m/s})(1 \text{ m}) + (3 \text{ kg})(3 \text{ m/s})(2 \text{ m}) \\ &= 30 \text{ kg m}^2/\text{s} \end{aligned}$$

39)

$$[\text{정답}] 42 \text{ m/s}$$

[해설]

$-5 \text{ rad/sec}^2$ 의 일정한 각가속도로  $40 \text{ rad}$  회전해서 정지한 것을 이용해서 처음 각속도  $\omega_0$ 를 구해보자.

개념 POINT

$$0 - \omega_0^2 = 2\alpha \Delta\theta$$

$$\omega_0 = \sqrt{2(-5\text{rad/s}^2)(40\text{rad})} = 20\text{rad/s}$$

충돌 전후의 입자계의 각운동량이 보존되므로

$$(2M^2 + mr^2)\omega_0 = mvr$$

정리하면

$$v = \frac{2M+m}{m}r\omega_0 = \frac{2\text{kg}+0.1\text{kg}}{0.1\text{kg}}(0.1\text{m})(20\text{rad/s})$$

$$= 42\text{m/s}$$

40)

[정답]  $\frac{mv}{(m+M)R}$

[해설] 외력이 작용하지 않았으므로 계의 총 각 운동량은 보존된다. 처음 기차와 레일이 정지해 있을 때는 계의 총 각운동량이 0이므로, 나중 기차가 움직일 때도 계의 총 각운동량은 0이다. 기차의 속력을  $v_T$ , 레일의 속력을  $v_R$ 이라 하면  $v = v_T + v_R$ 이다.

기차의 각 운동량은  $L_T = R \times p = mRv_T$

레일의 각 운동량은  $L_R = I\omega = MR^2 \times \frac{v_R}{R} = MRv_R$ 이므로

$$L_T = L_R \Rightarrow mRv_T = MRv_R \Rightarrow mR(v - v_R) = MRv_R$$

$$\therefore v_R = \frac{mv}{m+M}$$

따라서, 레일의 각속도는

$$\omega = \frac{v_R}{R} = \frac{mv}{(m+M)R}$$